

# Abschlußbericht

zum  
DFG-Projekt Ro 365 / 31 – 6

***DIE ENTWICKLUNG EINES  
MATHEMATISCH-NUMERISCHEN VERFAHRENS  
ZUR BERECHNUNG NATURNAHER FLIEßGEWÄSSER***

*2. korrigierte Fassung 12 / 2004*

em. Prof. Dr.-Ing. G. Rouvé  
Dr.-Ing. M. Schröder



LEHRSTUHL UND INSTITUT FÜR WASSERBAU UND WASSERWIRTSCHAFT  
RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

UNIV. PROF. DR.-ING. J. KÖNGETER

---

<b>Verzeichnis der Formelzeichen und Symbole.....</b>	<b>IV</b>
<b>Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen .....</b>	<b>VII</b>
<b>1 Einleitung .....</b>	<b>1</b>
1.1 Allgemeines .....	1
1.2 Ziele und erreichter Entwicklungsstand .....	1
1.3 Strukturierung des Berichts .....	3
<b>2 Grundlagen der Hydromechanik .....</b>	<b>4</b>
2.1 Statistische Beschreibung dreidimensionaler Strömungen .....	4
2.2 Vereinfachtes dreidimensionales Strömungsmodell.....	5
2.2.1 Hydrostatischer Druckansatz .....	6
2.2.2 Tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung mit kinematischer Randbedingung .....	7
2.3 Zweidimensional-tiefengemitteltes Strömungsmodell.....	7
2.4 Äußere Krafteinwirkung .....	8
2.4.1 Sohlschubspannungen .....	8
2.4.1.1 Logarithmisches Wandgesetz.....	8
2.4.1.2 Rauheitsbeiwerte in tiefengemittelter Betrachtung .....	11
2.4.1.3 Durchströmter Bewuchs.....	12
2.4.2 Windschubspannungen .....	16
2.4.3 Corioliskraft .....	17
2.5 Turbulenzmodellierung.....	17
2.5.1 Das Wirbelviskositätsprinzip .....	18
2.5.2 Algebraische Wirbelviskositätsmodelle .....	18
2.5.2.1 Vertikale Verteilung der Wirbelviskosität .....	18
2.5.2.2 Tiefengemittelter Ansatz .....	22
2.5.3 Das k- $\epsilon$ -Modell .....	23
2.5.3.1 Allgemeine Formulierung .....	23
2.5.3.2 Tiefengemittelte Version .....	25
2.5.4 Algebraisches Spannungsmodell (ASM) .....	26
<b>3 Numerisches Lösungsverfahren.....</b>	<b>30</b>
3.1 Methode der Finiten Elemente.....	30

---

3.2	Dreidimensionales Strömungsmodell.....	33
3.2.1	Transformation der freien Oberfläche.....	34
3.2.2	Formulierung der FE-Gleichungen.....	36
	Tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung.....	36
	Reynoldsgleichungen.....	37
	Kontinuitätsgleichung für die vertikale Fließgeschwindigkeit.....	37
	k- $\epsilon$ -Gleichungen.....	38
3.2.3	Randbedingungen.....	38
	Einlauftrand $\Gamma_E$ .....	41
	Auslauftrand $\Gamma_A$ .....	42
	feste Begrenzung $\Gamma_W$ .....	42
	freie Oberfläche $\Gamma_S$ .....	43
3.3	Zweidimensionales Strömungsmodell.....	43
3.3.1	Formulierung der FE-Gleichungen.....	44
3.3.2	Randbedingungen.....	44
3.4	Lösungsstrategie.....	44
3.4.1	Linearisierung und Gleichungslöser.....	44
3.4.2	Berechnungsablauf.....	45
<b>4</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen.....</b>	<b>48</b>
4.1	Mäandermodell.....	48
4.1.1	Versuchsstand und Meßprogramm.....	48
4.1.2	Meßtechnik und Datenerfassung.....	53
4.1.3	Ergebnisse.....	57
	4.1.3.1 Allgemeines Abflußverhalten.....	57
	4.1.3.2 Sekundärströmung.....	62
	4.1.3.3 Turbulenzverhalten.....	65
	4.1.3.4 Dispersive Terme.....	73
4.2	Wurmmodell.....	75
<b>5</b>	<b>Anwendung des numerischen Verfahrens.....</b>	<b>78</b>
5.1	180°-Schleife nach Rozovskii - Rechteckquerschnitt.....	78
5.2	Mäandermodell.....	88

---

5.2.1	Wahl der Randbedingungen.....	88
5.2.2	Zweidimensional-tiefengemittelte Simulation .....	90
a)	Gemischter Wirbelviskositätsansatz.....	95
b)	Kalibrierung der dimensionslosen Diffusivität $e^*$ .....	95
5.2.3	Dreidimensionale Simulation .....	100
5.3	Wurmmodell.....	108
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung.....</b>	<b>115</b>
<b>7</b>	<b>Literatur .....</b>	<b>118</b>
<b>Anhang A:</b>	<b>Formfunktionen und Integrationsformeln .....</b>	<b>123</b>
A.1	Eindimensionale Elemente .....	123
A.1.1	Linie .....	123
a)	lineare Formfunktionen .....	123
b)	quadratische Formfunktionen .....	123
c)	Gausspunktintegration .....	123
A.2	Zweidimensionale Elemente.....	124
A.2.1	Dreieck .....	124
A.2.2	Quadrat .....	125
A.3	Dreidimensionale Elemente.....	126
A.3.1	Tetraeder .....	126
A.3.2	Dreiecksprisma.....	128
A.3.3	Würfel .....	129
<b>Anhang B:</b>	<b>FE-Gleichungen .....</b>	<b>132</b>
B.1	3D Gleichungen mit hydrostatischem Druckansatz .....	132
B.1.1	Tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung.....	132
B.1.2	Reynoldsgleichungen.....	133
B.1.3	Kontinuitätsgleichung - Randwertgleichung.....	134
B.1.4	$k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen .....	134
B.2	2D-tiefengemittelte Gleichungen .....	135
B.2.1	Flachwassergleichungen.....	135
B.2.2	$k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen .....	136

## Verzeichnis der Formelzeichen und Symbole

### Indices

-	zeitliche Mittelung
+, *	dimensionslose Größe
^	momentane Größe
a	Sohle
i, j, k	Komponente eines Vektors
ij, ik, ...	Komponente eines Tensors
n	Normalenrichtung
P	Bewuchs
r	resultierend
S	Wasserspiegel
t	Tangentialrichtung, tiefengemittelte Größe
w	Wand oder Wind

### geometrische Größen

a	L	Sohlhöhe
a <sub>NB</sub>	L	Nachlaufbreite eines Kreiszyinders
a <sub>NL</sub>	L	Nachlauflänge eines Kreiszyinders
a <sub>p</sub>	L	mittlerer Bewuchsabstand
d <sub>p</sub>	L	mittlerer Bewuchsdurchmesser
H	L	Fließtiefe (zeitlicher Mittelwert)
k <sub>s</sub>	L	äquivalente Sandrauheit
l <sub>ε</sub>	L	Dissipationslänge
l <sub>m</sub>	L	Mischungsweg
L	L	turbulentes Längenmaß
S	L	Wasserspiegelhöhe
x <sub>i</sub> , x, y, z	L	globale Koordinatenrichtungen
ξ <sub>i</sub> , ξ, η, ζ	L	lokale oder transformierte Koordinatenrichtungen
Δ	L	mittlerer Abstand

### kinematische und dynamische Größen

C	L <sup>1/2</sup> T <sup>-1</sup>	Reibungsbeiwert nach de Chezy
D <sub>ij</sub>	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	dispersive Spannungen
e <sub>t</sub>	L <sup>2</sup> T <sup>-1</sup>	turbulente Diffusivität
F <sub>c</sub>	LT <sup>-2</sup>	Corioliskraft (bezogen auf die Masse)

$F_i$	$LT^{-2}$	äußere Kräfte (bezogen auf die Masse)
$g$	$LT^{-2}$	Erdbeschleunigung ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )
$k$	$L^2T^{-2}$	turbulente kinetische Energie
$n$	$L^{-1/3}T$	Reibungsbeiwert nach Manning
$P$	$L^2T^{-3}$	Produktionsterm für turbulente kinetische Energie
$P_{ij}$	$L^2T^{-3}$	Produktionsterm für Reynoldsspannungen
$P_{kV}$	$L^2T^{-3}$	sekundärer Produktionsterm in der $k$ -Gleichung
$P_{\varepsilon V}$	$L^2T^{-4}$	sekundärer Produktionsterm in der $\varepsilon$ -Gleichung
$t$	$T$	Zeit
$u_i, u, v, w$	$LT^{-1}$	Schwankungsgrößen der Fließgeschwindigkeit
$U_i, U, V, W$	$LT^{-1}$	zeitlich gemittelte Fließgeschwindigkeit
$U_W$		Windgeschwindigkeit
$U_\tau$	$LT^{-1}$	Sohlschubspannungsgeschwindigkeit
$p$	$ML^{-1}T^{-2}$	Schwankungsgröße des Druckes
$P$	$ML^{-1}T^{-2}$	zeitlich gemittelter Druck
$Q$	$L^3T^{-1}$	Abfluß
$T_{ij}$	$ML^{-1}T^{-2}$	turbulente Spannungen, Reynoldsspannungen
$V_{ij}$	$ML^{-1}T^{-2}$	viskose Spannungen
$\varepsilon$	$L^2T^{-3}$	Dissipation der turbulenten kinetischen Energie
$\nu$	$L^2T^{-1}$	kinematische Viskosität
$\nu_t$	$L^2T^{-1}$	Wirbelviskosität
$\rho$	$ML^{-3}$	spezifische Dichte von Wasser
$\Pi_{ij}$	$L^2T^{-3}$	Umverteilungsterm im Algebraischen Spannungsmodell
$\tau$	$ML^{-1}T^{-2}$	Schubspannung
$\tau_a$	$ML^{-1}T^{-2}$	Sohlschubspannung
$\omega$	$T^{-1}$	Winkelgeschwindigkeit der Erde

### dimensionslose Konstanten und Kennzahlen

$c_1, c_2, c_3$	Konstanten im Algebraischen Spannungsmodell
$c_f$	Reibungskoeffizient
$C_{W\Box}$	Formbeiwert eines überströmten Kreiszyinders
$C_{WR}$	Formbeiwert für durchströmten Bewuchs
$C_\mu, C_D, C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, C_\varepsilon$	Konstanten des $k$ - $\varepsilon$ -Modells
$D_k, D_\varepsilon$	Konstanten im algebraischen Turbulenzmodell
$e^*$	dimensionslose Diffusivität
$E$	Rauheitsparameter im logarithmischen Wandgesetz
$f$	Formbeiwert
$f_1, f_2$	Wandabstandsfunktionen
$Fr$	Froudezahl
$H^*$	Fließtiefenverhältnis
$k_W$	Reibungskoeffizient für Windschubspannungen
$Re$	Reynoldszahl

---

$Re_k$	Reynoldszahl der äquivalenten Sandrauheit $k_s$
$Re_p$	Reynoldszahl eines Kreiszylinders
$U^*$	relative Anströmgeschwindigkeit
$x_n^+$	dimensionsloser Wandabstand
$\alpha, \beta, \gamma$	Konstanten im Algebraischen Spannungsmodell
$\alpha_p$	Verbauverhältnis
$\delta_{ij}$	Kronecker Delta
$\delta_w$	Wandabstand
$\eta$	relativer Sohlabstand
$\kappa$	von-Kármán-Konstante ( $\kappa = 0,41$ )
$\lambda_a$	Sohlwiderstandsbeiwert nach Colebrook/White
$\lambda_p$	Widerstandsbeiwert für durchströmten Bewuchs
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$	Konstanten des k- $\varepsilon$ -Modells
$\sigma_t$	turbulente Schmidtzahl
$\Theta$	Breitengrad

## Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen

- Abb. 2.1: Zweidimensionale Kanalströmung - Koordinatendefinition
- Abb. 2.2: Dimensionsloses Geschwindigkeitsprofil in Wandgrenzschichten
- Abb. 2.3: Fließtiefenverhältnis nach LINDNER (Gl. 2.29)
- Abb. 2.4: Definitionsskizze zur Impulsbilanz an einem umströmten Kreiszyylinder
- Abb. 2.5: Fließtiefenverhältnis nach Gl. 2.33
- Abb. 2.6: Klassifizierung der implementierten Turbulenzmodelle
- Abb. 2.7: Offene stationär-gleichförmige Kanalströmung
- Abb. 2.8: Verlauf der turbulenten Größen  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\nu_t$  - algebraische Modelle
- Tab. 2.9: Konstanten des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells
- Abb. 3.1: Diskretisierung des Lösungsraumes  $\Omega$  und des Randes  $\Gamma$  in Finite Elemente
- Abb. 3.2: Elementtransformation
- Abb. 3.3: Einheitstransformation nach KING (1982)
- Abb. 3.4: Revidierte Transformation nach KING (1984)
- Abb. 3.5: Modifizierte Transformationsvorschrift
- Abb. 3.6: Überlagerung der vertikalen Fließgeschwindigkeit aus kinematischer Randbedingung und Gl. 3.22
- Abb. 3.7: Definition eines gedrehten Randkoordinatensystems
- Abb. 3.8: Ermittlung der Randnormalenrichtung  $n_i$  zur Gewährleistung der globalen Kontinuität
- Abb. 3.9: Geschwindigkeitsprofil nach dem Potenzgesetz
- Abb. 3.10: Lösungsalgorithmus
- Abb. 4.1: Physikalisches Mäandermodell
- Abb. 4.2: Geometrische Abmessungen des Mäanders
- Abb. 4.3: Physikalisches Mäandermodell mit Blickrichtung auf den Modellzulauf
- Abb. 4.4: 3-Kanal-Laser-Doppler-Anemometer; Blick auf den Umlenkspiegel
- Abb. 4.5: Parametervariation und Versuchsnummer
- Tab. 4.6: Realisierte Versuchsreihen
- Abb. 4.7: 3-Kanal-LDA-System
- Abb. 4.8: Strahlenkonfiguration
- Abb. 4.9: Schlüsselkurven des Mäandermodells

- Abb. 4.10: Tiefengemittelte Längsgeschwindigkeit in Querschnitt Q07
- Abb. 4.11: Generelles Strömungsbild im Mäander
- Abb. 4.12: Resultierende Geschwindigkeiten in Querschnitt 10 (tiefengemittelt)
- Abb. 4.13: Sekundärströmung, Versuch I05 B06 H130
- Abb. 4.14: Sekundärströmung, Versuch I05 B06 H150
- Abb. 4.15: Reynoldsspannungen  $\overline{\rho u u}$ , Versuch I05 B06 H130
- Abb. 4.16: Reynoldsspannungen  $\overline{\rho u v}$ , Versuch I05 B06 H130
- Abb. 4.17: Tiefengemittelter Turbulenzgrad
- Abb. 4.18: Tiefengemittelte turbulente Schubspannung  $\overline{\rho u v}$  - Versuch I05 B06 H130
- Abb. 4.19: Tiefengemittelte turbulente Schubspannung  $\overline{\rho u w}$  - Versuch I05 B06 H130
- Abb. 4.20: Tiefengemittelte turbulente Schubspannung  $\overline{\rho v w}$  - Versuch I05 B06 H130
- Abb. 4.21: Zusammenhang Dispersion, Sekundärströmung und Turbulenz
- Abb. 4.22: Wurm bei Herzogenrath: Luftaufnahme und Modellansicht in vergleichbarer Perspektive
- Abb. 4.23: Lage der vermessenen Querprofile
- Abb. 5.1: Rechteckgerinne mit  $180^\circ$  Krümmung nach ROZOVSKII (1957)
- Abb. 5.2: FE-Netz in Aufsicht und im Schnitt; Rechteckgerinne mit  $180^\circ$  Krümmung
- Abb. 5.3: Wasserpiegelverlauf am Innen- und Außenufer - Rozovskii-Schleife
- Abb. 5.4: Isolinien des Wasserpiegels - Rozovskii-Schleife
- Abb. 5.5: Sekundärströmungen in Querschnitt  $\Theta = 60^\circ$  - Rozovskii-Schleife
- Abb. 5.6: Quergeschwindigkeit in Querschnitt  $\Theta = 135^\circ$  - Rozovskii-Schleife
- Abb. 5.7: Längsgeschwindigkeit in Querschnitt  $\Theta = 135^\circ$  - Rozovskii-Schleife
- Abb. 5.8: Turbulente Größen  $k, \varepsilon, \nu_t$ ; algebraisches Wirbelviskositätsmodell - Rozovskii-Schleife
- Abb. 5.9: Turbulente Größen  $k, \varepsilon, \nu_t$ ;  $k$ - $\varepsilon$ -Modell - Rozovskii-Schleife
- Abb. 5.10: Zulaufrandbedingung für das Mäandermodell
- Abb. 5.11: FE-Netz für die zweidimensional-tiefengemittelte Simulation - Mäander
- Abb. 5.12: Materialzonen im Mäander
- Tab. 5.13: Materialparameter für die zweidimensional-tiefengemittelte Simulation - Mäander

- Abb. 5.14: Resultierende Fließgeschwindigkeit; tiefengemittelte Simulation mit konstanter Wirbelviskosität; Mäanderströmung; Versuch I05 B06 H130
- Abb. 5.15: Resultierende Fließgeschwindigkeit und turbulente kinetische Energie; tiefengemittelte Simulation mit  $k$ - $\varepsilon$ -Modell ( $e^* = 0,6$ ); Mäanderströmung; Versuch I05 B06 H130
- Abb. 5.16: Resultierende Fließgeschwindigkeit und turbulente kinetische Energie; tiefengemittelte Simulation mit  $k$ - $\varepsilon$ -Modell (kalibriert); Mäanderströmung; Versuch I05 B06 H130
- Abb. 5.17: Wasserspiegel (links), Reynoldszahl (mitte) und Geschwindigkeitsfeld (rechts); tiefengemittelte Simulation mit  $k$ - $\varepsilon$ -Modell (kalibriert); Mäanderströmung; Versuch I05 B06 H130
- Abb. 5.18: Turbulente kinetische Energie (links) und Dissipation (rechts); tiefengemittelte Simulation mit  $k$ - $\varepsilon$ -Modell (kalibriert); Mäanderströmung; Versuch I05 B06 H130
- Abb. 5.19: Randbedingungsproblematik an Sohlspürungen
- Abb. 5.20: FE-Netz für die dreidimensionale Strömungssimulation des Mäandermodells (Aufsicht und Schnitt durch Querschnitt 16)
- Abb. 5.21: Tiefengemittelte resultierende Fließgeschwindigkeiten - 3D Simulation Mäandermodell; Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell
- Abb. 5.22: Sekundärströmungen - 3D Simulation Mäandermodell; Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell
- Abb. 5.23: Fließgeschwindigkeiten in Querschnitt 7 in verschiedenen Höhen  $z'$  - 3D Simulation Mäandermodell; Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell
- Abb. 5.24: Fließgeschwindigkeiten in Querschnitt 12 in verschiedenen Höhen  $z'$  - 3D Simulation Mäandermodell; Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell
- Abb. 5.25: Fließgeschwindigkeiten in Querschnitt 16 in verschiedenen Höhen  $z'$  - 3D Simulation Mäandermodell; Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell
- Abb. 5.26: Wasserspiegel und Fließgeschwindigkeitsfeld in zwei Höhen  $z'$  - 3D Simulation Mäandermodell; Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell
- Abb. 5.27: Aufteilung des Wurmodells im Basisnetz nach Rauheitsbereichen
- Abb. 5.28: Finite-Elemente-Netz und Sohlhöhen - Wurmodell
- Tab. 5.29: Turbulenz- und Rauheitsparameter für die Simulation des Wurmodells

---

Abb. 5.30: Verlauf des berechneten Wasserspiegels - Wurmmodell

Abb. 5.31: Fließgeschwindigkeitsfeld - Wurmmodell

Abb. 5.32: Gemessene und berechnete Geschwindigkeitsprofile für Querschnitt X.A - Wurmmodell

## **1 Einleitung**

### **1.1 Allgemeines**

Die Bedürfnisse der heutigen Industriegesellschaft erfordern eine zuverlässige Berechnung der Wasserspiegellagen und Fließgeschwindigkeiten in naturnahen Fließgewässern. Sie leiten sich ab aus der wachsenden Notwendigkeit zur Erhaltung und Wiederherstellung intakter Umweltbedingungen. Der weitestgehende Verzicht auf Ausbaumaßnahmen und die Wiedenzulassung der Auenüberflutung an Fließgewässern erschweren aufgrund der wesentlich komplexeren Strömungsverhältnisse die hydraulische Berechnung erheblich. Zuverlässiger Hochwasserschutz erfordert zuverlässige Vorhersage der im Hochwasserfall zu erwartenden Wasserspiegellagen. Die Abschätzung des Erosionsrisikos von Uferbefestigungen, Hochwasserdeichen usw. sowie die Notwendigkeit der Vorhersage der Sohlendynamik (Erosion und Sedimentation) setzen eine detaillierte Kenntnis des Fließgeschwindigkeitsfelds bei Niedrig-, Mittel- und Hochwasserereignissen voraus.

Ziel dieses Forschungsvorhabens war die Bereitstellung der Grundlagen für praxisrelevante Berechnungsverfahren, die es erlauben, Wasserspiegellagen und Fließgeschwindigkeiten mit einem vertretbaren Aufwand zuverlässig zu ermitteln.

### **1.2 Ziele und erreichter Entwicklungsstand**

Im Rahmen des Projektes sollten verschiedene numerische Verfahren, basierend auf der Methode der Finiten Elemente, entwickelt und auf ihre Praxisrelevanz getestet werden. Zur Verifikation der mathematischen Modelle und zur Verbesserung des Kenntnisstandes der komplexen Strömungsvorgänge in natürlichen Fließgewässern war es zunächst notwendig, ein Potential an grundlegendem, experimentellem Datenmaterial bereitzustellen. Zu diesem Zweck wurde das physikalische Modell eines mäandrierenden Gerinnes mit überströmten Vorländern errichtet. Die Untersuchungen galten der Erforschung der Strömungsvorgänge einschließlich der Turbulenz. Es waren daher besondere Anforderungen an die Meßtechnik zu stellen, wie dreidimensionale Erfassung des Strömungsfeldes und berührungsfreie Meßwertaufnahme, die nur die 3D-Laser-Doppler-Anemometry (LDA) erfüllen kann.

Während der Projektbearbeitungszeit stand außerdem das physikalische Modell eines natürlichen Mäanders zur Verfügung (Wurm bei Herzogenrath, Modellmaßstab 1:30). Auf der Grundlage einer topographischen und strömungsphysikalischen Aufnahme des Modells, sollte das generelle Vorgehen und die Praxistauglichkeit der entwickelten numerischen Verfahren an einem quasi-natürlichen Anwendungsfall aufgezeigt werden.

Die Entwicklung der verschiedenen Programmsysteme zur numerischen Strömungssimulation mit der Methode der Finiten Elemente (FEM) erfolgte parallel zu den experimentellen Untersuchungen. Auf diesem Weg konnten Erkenntnisse aus den physikalischen Modellversuchen direkt in die numerischen Entwicklungsarbeiten einbezogen werden.

In der ersten Phase der Projektbearbeitungszeit wurde die Entwicklung eines zwei-dimensional-tiefengemittelten Strömungsmodells mit verschiedenen Ansätzen zur Turbulenzmodellierung (bereichsweise konstante Wirbelviskosität, algebraische Ansätze und  $k$ - $\varepsilon$ -Modell) durchgeführt. Dieses Modell zeigte in Bereichen, die aufgrund intensiver Sekundärströmungen eine erhebliche vertikale Ungleichförmigkeit der Geschwindigkeitsprofile aufweisen (Dispersion), signifikante Abweichungen zu den experimentellen Daten. Diese Differenzen können nur durch eine zielgerichtete Kalibrierung des Modells ausgeglichen werden. In der zweiten Phase wurde die Entwicklung eines dreidimensionalen Strömungsmodells mit hydrostatischem Druckansatz und mit verschiedenen Turbulenzmodellen durchgeführt. Nur auf diesem Weg ist eine allgemeingültige Berücksichtigung der Dispersion möglich. Zusätzlich zu den bereits im tiefengemittelten Modell implementierten Turbulenzmodellen sollte ein algebraisches Spannungsmodell als Erweiterung des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells getestet werden. Die Implementierung dieses Modells ist noch nicht abgeschlossen, da zunächst umfangreiche Testrechnungen mit dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell erforderlich waren.

Die numerischen Entwicklungsarbeiten erfolgten in der Programmiersprache C. Hierdurch ließen sich modernste Programmier Techniken verwirklichen, die die Voraussetzung für eine effiziente Programmpflege und -weiterentwicklung sind. Die Daten wurden nach Objekten (Knoten und Elemente) hierarchisch und damit transparent strukturiert. Das Programm gliedert sich in ca. 150 Module (Funktionen), die über klar definierte Schnittstellen (Ein- und Ausgangsparameter) kommunizieren und daher einzeln getestet werden konnten. Die Speicherverwaltung erfolgt vollständig dynamisch. Eine problemangepaßte Übersetzung des Programmcodes wird damit hinfällig.

Durch die strikte Einhaltung des ANSI-C-Standards ist eine direkte Portierung des Programmcodes auf unterschiedliche Rechnerplattformen gewährleistet. Getestet wurde das Programm auf Personal-Computern (PC), unterschiedlichen Unix-Workstations (HP, SUN und IBM) und auf dem an der RWTH Aachen verfügbaren Vektorrechner (Siemens/Nixdorf S600/20). Auf dem PC erfolgten die Entwicklungsarbeiten und der Test der Implementierung anhand kleiner Anwendungsbeispiele. Zweidimensional-tiefengemittelte Berechnungen bis zu einer Netzgröße von 500 Elementen sind auf diesen kleinen Rechnern praktikabel. Größere Anwendungen (zweidimensional bis 10000 Elemente und dreidimensional bis 3000 Elemente) sind mit guter Performance auf Workstations ausführbar. Auf dem Hochleistungs-Vektorrechner ist mit einer um den Faktor 40 gesteigerten Rechengeschwindigkeit und größerer verfügbarer Speicherressourcen die Simulation aufwendigerer Anwendungen möglich. Durch eine weitere zukünftige Optimierung der Gleichungslö-

ser kann die Leistung noch gesteigert werden. Das Verhältnis von Skalar- zu Vektoroperationen liegt derzeit problemabhängig bei 1 : 1.

### **1.3 Strukturierung des Berichts**

Der vorliegende Abschlußbericht läßt sich grob in drei Teile gliedern. Der erste umfaßt die Kapitel 2 und 3 und gibt eine Zusammenfassung aller hydromechanischen und numerischen Grundlagen, auf denen die Entwicklung der Strömungsmodelle basiert. Der zweite Teil, Kapitel 4, beschreibt die physikalischen Modellversuche, die Grundlagen der eingesetzten LDV-Meßtechnik sowie die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen. Im dritten Teil, Kapitel 5, werden schließlich die Ergebnisse der Simulationsrechnungen für drei unterschiedliche Anwendungsfälle präsentiert und diskutiert. Dies sind zwei unterschiedliche Laborgerinne mit einer eindeutig beschreibbaren Geometrie (Rozovskii-Schleife aus der Literatur und Mäandermodell der RWTH Aachen) sowie das physikalische Modell eines natürlichen Mäanders (Wurmmodell der RWTH Aachen).

## 2 Grundlagen der Hydromechanik

### 2.1 Statistische Beschreibung dreidimensionaler Strömungen

Turbulente Strömungen sind ein Kontinuumsproblem, da der Längenmaßstab der kleinsten Wirbelstrukturen wesentlich größer ist als die molekularen Abmessungen des Fluids (TENNEKES und LUMLEY, 1972). Unter Anwendung der Erhaltungssätze für Masse und Impuls auf ein infinitesimales Volumenelement wird ein geschlossenes Gleichungssystem von vier partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für den unbekanntes Fließgeschwindigkeitsvektor  $\hat{u}_i$  und den Druck  $\hat{p}$  erhalten. Dies sind die Navier-Stokes-Gleichungen und die Kontinuitätsbedingung (Gl. 2.1 und 2.2)<sup>1</sup>.

$$\underbrace{\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t}}_{\text{lokale Beschleunigung}} + \underbrace{\hat{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j}}_{\text{konvektive}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i}}_{\text{Druck}} + \underbrace{\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \right)}_{\text{Spannungs-tensor}} + \underbrace{\hat{f}_i}_{\text{äußere Kräfte}} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

Eine allgemeine analytische Lösung dieser Gleichungen ist nicht bekannt. Auch eine numerische Lösung ist mit den derzeit vorhandenen Rechnerkapazitäten nur für sehr einfache Strömungsgeometrien bei kleinen Reynoldszahlen möglich. Denn die Abbildung der kleinsten turbulenten Strukturen erfordert eine extrem hohe räumliche und zeitliche Auflösung des Strömungsgebietes. In Gerinneströmungen mit üblicherweise relativ hohen Reynoldszahlen liegt das Verhältnis der kleinsten turbulenten Strukturen zur Fließtiefe bei  $10^{-3}$  bis  $10^{-4}$  (NEZU und NAKAGAWA, 1993). Die direkte numerische Simulation solch einer Strömung würde folglich allein in der vertikalen Richtung eine Anzahl von 1.000 bis 10.000 Gitterpunkten erfordern. Dieser große rechentechnische Aufwand wird selbst mit wesentlich leistungsfähigeren Rechanlagen in näherer Zukunft nicht zu bewältigen sein.

Eine erhebliche Verminderung der notwendigen Gitterfeinheit kann durch die statistische Beschreibung des Turbulenzverhaltens erreicht werden. Hierzu wird zum Beispiel die momentane Fließgeschwindigkeit  $\hat{u}_i$  in einen Mittelwert  $U_i$  und eine Schwankungsgröße  $u_i$  aufgespalten:

---

<sup>1</sup> Hier und im weiteren gilt die Summationskonvention: Über mehrfach auftretenden Indizes in Faktoren ist zu summieren.

$$\hat{u}_i(x, y, z, t) = U_i(x, y, z) + u_i(x, y, z, t) \quad (2.3)$$

Mit diesem Ansatz lassen sich die Ausgangsgleichungen über einen Zeitraum statistisch mitteln, der groß sein muß gegenüber dem Zeitmaßstab der größten Turbulenzwirbel aber klein gegenüber instationären Strömungsvorgängen, die durch eine zeitliche Änderung der Randbedingungen verursacht werden (z.B. HINZE, 1975). Die statistische Betrachtung geht auf den britischen Physiker *Osborne Reynolds* (1842 - 1912) zurück. Die zeitlich gemittelten Strömungsgleichungen sind nach ihm bekannt unter der Bezeichnung *Reynoldsgleichungen*:

$$\underbrace{\frac{\partial U_i}{\partial t}}_{\text{lokale Beschleunigung}} + \underbrace{U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}}_{\text{konvektive}} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}}_{\text{Druck}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{u_i u_j} \right)}_{\text{Spannungstensor}} + \underbrace{F_i}_{\text{äußere Kräfte}} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.5)$$

Eine vollständige Lösung der Reynoldsgleichungen würde nahezu jeder praktischen Fragestellung gerecht werden, da fast ausschließlich die mittleren Strömungsgrößen von Interesse sind; eine detaillierte Kenntnis des turbulenten Verhaltens ist in der Regel von untergeordneter Bedeutung. Während jedoch die Ausgangsgleichungen (2.1 und 2.2) noch ein geschlossenes Gleichungssystem darstellten, beinhalten die Reynoldsgleichungen turbulente Austauschgrößen  $\overline{u_i u_j}$ , die aus der statistischen Mittelung der konvektiven Terme stammen. Das sind aus meßtechnischer Sicht die korrelierten Fluktuationen der Fließbewegung. Sie werden in der erweiterten Form  $\rho \overline{u_i u_j}$  auch als Reynoldsspannungen bezeichnet, da sie auf die Strömung eine ähnliche Wirkung wie eine innere Reibungskraft haben. Mit den sechs voneinander unabhängigen Komponenten des Reynoldsspannungstensors ist das Gleichungssystem nicht mehr geschlossen. Es müssen zusätzliche Modellannahmen hinsichtlich ihrer Größe und Verteilung getroffen werden. Dies ist die Aufgabe der in Kapitel 2.5 näher beschriebenen Turbulenzmodelle.

## 2.2 Vereinfachtes dreidimensionales Strömungsmodell

In der Simulation natürlicher Fließgewässer ist die Ermittlung der freien Oberfläche von zentraler Bedeutung. Sie stellt eine große numerische Schwierigkeit in der Modellierung dreidimensionaler Strömungsvorgänge dar, da die Wasserspiegellage einen erheblichen Einfluß auf das Strömungsgeschehen hat und ihre Berechnung somit stark an die Lösung der Strömungsgleichungen gekoppelt ist. Bei den in Kapitel 2.3 beschriebenen zweidimensional-tiefengemittelten Gleichungen treten diese Probleme kaum auf.

In Anlehnung an die Erfahrungen mit der zweidimensional-tiefengemittelten Strömungsmodellierung können die Reynoldsgleichungen weiter vereinfacht werden. Ein übliches Vorgehen ist dabei die Verwendung eines hydrostatischen Druckansatzes unter Vernachlässigung der vertikalen Impulsbilanz und die Lösung einer tiefengemittelten Kontinuitätsgleichung unter Berücksichtigung der kinematischen Randbedingung an der freien Oberfläche und an der Sohle (z.B. WANG, 1991 und KING 1988). Das hierdurch erhaltene Gleichungssystem läßt sich mit einem erheblich reduzierten Aufwand lösen. Es besteht aus den beiden horizontalen Impulsbilanzgleichungen (Unbekannte U und V), der tiefengemittelten Kontinuitätsgleichung (Unbekannte S) und der Kontinuitätsgleichung (Unbekannte W).

Obwohl es sich wegen der Vernachlässigung des vertikalen Impulses nicht mehr um ein vollständiges dreidimensionales Strömungsmodell handelt, sind die Vorteile gegenüber der zweidimensional-tiefengemittelten Simulation erheblich: Die Fließgeschwindigkeiten in Sohlnähe, die für eine Modellierung der Sohlendynamik (Erosion und Sedimentation) von Bedeutung sind, lassen sich wesentlich besser vorhersagen; die Simulation von Sekundärströmungen und deren Einfluß auf die Hauptströmung erlauben den Verzicht auf die verquickte Kalibrierung von diffusivem und dispersivem Transport.

### 2.2.1 Hydrostatischer Druckansatz

In einer ausgeprägten Flachwasserströmung sind die vertikalen Geschwindigkeitskomponenten um Größenordnungen kleiner als die horizontale Fließgeschwindigkeit. Damit wird eine Vernachlässigung des vertikalen Impulses zulässig. Die zugehörige Impulsleichung reduziert sich somit auf:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (2.6)$$

Eine Integration dieser Gleichung zwischen einem Punkt in der Strömung in der Höhe z und dem freien Wasserspiegel S führt auf den hydrostatischen Druckansatz:

$$P = \rho g(S - z) \quad (2.7)$$

Mit Gleichung 2.7 können die Druckgradienten in den beiden horizontalen Impulsleichungen durch die Neigung der Wasserspiegellinie ausgedrückt werden (Gl. 2.8). Hierdurch wird der Druck als unbekannt Variable eliminiert.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial S}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \rho g \frac{\partial S}{\partial y} \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung mit kinematischer Randbedingung

In den vereinfachten dreidimensionalen Strömungsgleichungen dient die Kontinuitätsgleichung in tiefengemittelter Form als eine Gleichung für die freie Oberfläche. Hierzu wird die ursprüngliche Kontinuitätsgleichung (Gl. 2.5) in vertikaler Richtung integriert. An den beiden nicht durchströmten Rändern (Sohle  $a$  und Wasserspiegel  $S$ ) verschwindet die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Rand. Hier kann die vertikale Geschwindigkeit  $W$  daher mit der kinematischen Randbedingung durch die Neigung der Sohle bzw. freien Oberfläche und durch die beiden Horizontalkomponenten der Fließgeschwindigkeit ausgedrückt werden. Unter Verwendung dieser Bedingung lautet die tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung:

$$\int_a^S \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) dz = W_a - W_s$$

$$= U_a \frac{\partial a}{\partial x} + V_a \frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial t} - U_s \frac{\partial S}{\partial x} - V_s \frac{\partial S}{\partial y} \quad (2.9)$$

### 2.3 Zweidimensional-tiefengemittelttes Strömungsmodell

Die Modellierung naturnaher Fließgewässer kann in vielen Fällen durch eine zweidimensional-tiefengemittelte Betrachtung vereinfacht werden. Die hierzu erforderliche Integration der Reynoldsgleichungen in vertikaler Richtung führt auf die Flachwassergleichungen (KUIPERS und VREUGDENHIL, 1973):

$$H \frac{\partial U_i}{\partial t} + H U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -gH \frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ H (V_{ij} + T_{ij} + D_{ij}) \right] + HF_i \quad (2.10)$$

*lokale Beschleunigung*      *konvektive Beschleunigung*      *Schwerkraft*      *Spannungstensor*      *äußere Kräfte*

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial (H U_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.11)$$

mit:

$$V_{ij} = \rho \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad \text{viskoser Spannungstensor}$$

$$T_{ij} = \rho \overline{u_i u_j} \quad \text{turbulenter Spannungstensor}$$

$$D_{ij} = \frac{\rho}{H} \int_a^S (U_i - U_{i,t})(U_i - U_{i,t}) dz \quad \text{dispersiver Spannungstensor}$$

Der Integration liegt die Annahme einer hydrostatischen Druckverteilung zugrunde. An den Integrationsgrenzen (Sohle und Wasserspiegel) werden die turbulenten/viskosen Terme ( $T_{ij}$  und  $V_{ij}$ ) mit den Sohl- bzw. Windschubspannungen approximiert. Sie werden in der Gleichung als zusätzliche äußere Kraft berücksichtigt.

Eine allgemeingültige Abschätzung der dispersiven Terme  $D_{ij}$  erscheint kaum möglich. Ihre Vernachlässigung schränkt jedoch die Flachwassergleichungen auf Anwendungsfälle mit geringer Sekundärströmung ein, die die Annahme einer nahezu gleichförmigen vertikalen Geschwindigkeitsverteilung rechtfertigen. Andernfalls muß auf der Basis ausführlicher Naturmeßdaten eine Kalibrierung dieser Terme erfolgen.

## 2.4 Äußere Krafteinwirkung

Äußere Kräfte sind zum einen Körperkräfte, wie die Erdschwere und die Corioliskraft, und zum anderen Kräfte, die über die Berandung auf die Strömung einwirken, wie Wind- und Sohl Schubspannungen. Die Erdschwere findet über den hydrostatischen Druck Eingang in die hier beschriebenen vereinfachten dreidimensionalen und zweidimensional tiefengemittelten Gleichungen und bedarf daher keiner gesonderten Betrachtung.

### 2.4.1 Sohlschubspannungen

#### 2.4.1.1 Logarithmisches Wandgesetz

An einfachen zweidimensionalen und stationär-gleichförmigen Strömungsvorgängen (Rohrströmung oder zweidimensionale Kanalströmung) lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen weitgehend vereinfachen und in  $x_n$ -Richtung integrieren (vgl. Abb. 2.1). Es ergibt sich eine lineare Verteilung der inneren Schubspannung  $\tau$  (Gl. 2.12), die an der Sohle ( $x_n = 0$ ) den maximalen Wert von  $\tau_a = \rho U_\tau^2$  annimmt.  $\tau_a$  ist die Sohlschubspannung und  $U_\tau$  die Sohlschubspannungsgeschwindigkeit (z.B.: TENNEKES / LUMLEY, 1972).

$$\frac{\tau}{\rho} = -\overline{u_n u_t} + \nu \frac{\partial U_t}{\partial x_n} = U_\tau^2 \left( 1 - \frac{x_n}{H} \right) \quad (2.12)$$

Unter weiterer Verwendung des Prandtl'schen Mischungswegansatzes und der van Driest'schen Dämpfungbeziehung (z.B. NEZU / NAKAGAWA, 1993) wird durch Integration von Gleichung 2.12 das Geschwindigkeitsprofil  $U_t$  erhalten:

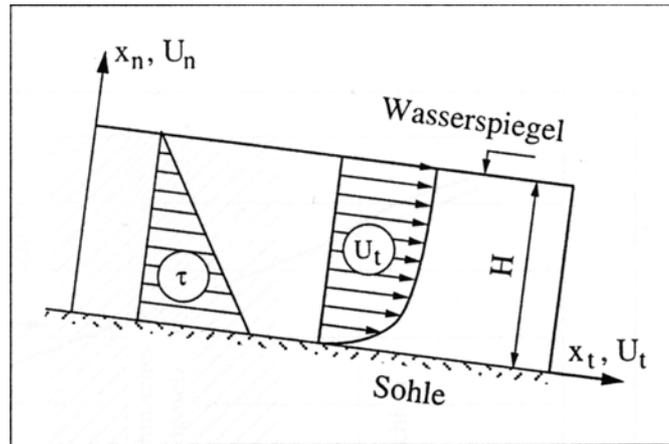


Abb. 2.1: Zweidimensionale Kanalströmung - Koordinatendefinition

$$\frac{U_t}{U_\tau} = x_n^+ \quad \text{für: } x_n^+ < 11 \quad (2.13)$$

$$\frac{U_t}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln(E \cdot x_n^+) \quad \text{für: } 26 < x_n^+ < 0,2 \cdot \frac{H U_\tau}{\nu} \quad (2.14)$$

Hierin ist  $x_n^+ = x_n U_\tau / \nu$  der dimensionslose Wandabstand. Die von-Kármán-Konstante  $\kappa$  hat nach experimentellen Untersuchungen einen Wert von etwa 0,41.

Im Geschwindigkeitsprofil lassen sich vier unterschiedliche Bereiche charakterisieren (vgl. Abb. 2.2): Die viskose Unterschicht, in der Gl. 2.13 Gültigkeit hat, der Bereich des logarithmischen Wandgesetzes (Gl. 2.14), eine Übergangsschicht, für die sich keine direkte algebraische Beziehung formulieren läßt sowie die Außenschicht der Strömung. Hinsichtlich des Gültigkeitsbereiches des logarithmischen Wandgesetzes sind in der Literatur unterschiedliche Angaben zu finden. SCHULTE (1989) nennt bei seiner Simulation abgelöster turbulenter Strömungen zum Beispiel einen Bereich von  $30 < x_n^+ < 400$ . Demgegenüber sind die Einschränkungen bei NAOT (1984) wesentlich größer; mit einem Gültigkeitsbereich von  $70 < x_n^+ < 140$  berechnet er Sekundärströmungen in einem rechteckigen Kanal.

Der Rauheitsparameter  $E$  in Gleichung 2.14 nimmt in Abhängigkeit vom hydraulischen Verhalten an der Wand unterschiedliche Werte an. Zu unterscheiden sind drei Bereiche in Abhängigkeit von der Reynoldszahl der äquivalenten Sandrauheit  $k_S$ :  $Re_k = k_S U_\tau / \nu$  (ZANKE, 1982):

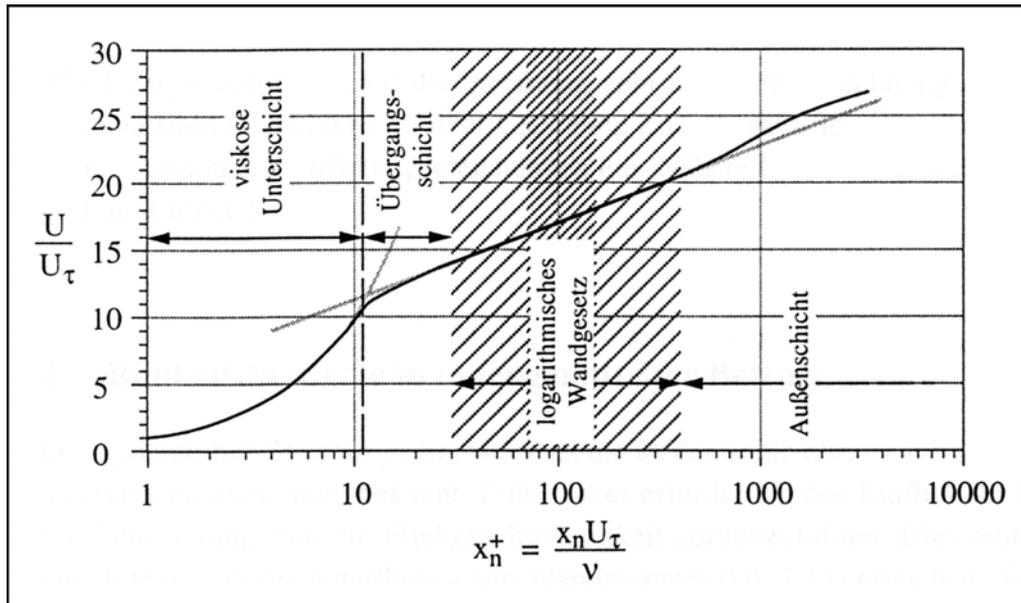


Abb. 2.2: Dimensionsloses Geschwindigkeitsprofil in Wandgrenzschichten

**hydraulisch glattes Verhalten**

**$Re_k < 3,32$**

$$\frac{U_t}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln(9 \cdot x_n^+) \quad (2.15)$$

**hydraulisch rauhes Verhalten**

**$Re_k > 70$**

$$\frac{U_t}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln\left(\frac{x_n}{k_s}\right) + 8,5 \quad (2.16)$$

**Übergangsbereich (glatt/rauh)**

**$3,32 \leq Re_k \leq 70$**

$$\frac{U_t}{U_\tau} = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln\left(\frac{x_n}{k_s}\right) + 8,5 + \frac{3,32}{\kappa \cdot Re_k} \cdot \ln(Re_k) - \frac{9,96}{Re_k} \quad (2.17)$$

Der Einfluß der Wandrauheit auf die Strömung geht nach der Berechnung der Sohl-schubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau$  über Gleichung 2.12 als natürliche Randbedingung in die dreidimensionalen Strömungsgleichungen ein. Nähere Erläuterungen hierzu befinden sich in Kapitel 3.

### 2.4.1.2 Rauheitsbeiwerte in tiefengemittelter Betrachtung

In der tiefengemittelten Strömungssimulation ist die an der Sohle oder Wand angreifende Fließgeschwindigkeit nicht bekannt. Daher ist es erforderlich den Einfluß der Sohlrauheit auf die tiefengemittelte Fließgeschwindigkeit zurückzuführen. Dies läßt sich durch eine Integration des logarithmischen Wandgesetzes (Gl. 2.14) erreichen, die auf das Widerstandsgesetz von *Prandtl* führt. An dieser Stelle sei nur das Widerstandsgesetz von *Colebrook/White* aufgeführt, das mit ausreichender Genauigkeit über dem gesamten Bereich von hydraulisch glatt nach rauh anwendbar ist. Es gilt für den Widerstandsbeiwert  $\lambda_a$  der Sohle:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_a}} = -2,03 \cdot \log \left( \frac{f}{\text{Re} \sqrt{\lambda_a}} + \frac{k_s}{14,84 H} \right) \quad (2.18)$$

Mit dem Formbeiwert  $f$  können unterschiedliche Gerinneformen berücksichtigt werden. Nach experimentellen Untersuchungen von *PASCHE* (1984) an einem geraden gegliederten Gerinne nimmt er einen Wert von  $f = 4,4$  an. Die Reynoldszahl in Gl. 2.18 berechnet sich aus der Fließtiefe  $H$  und der tiefengemittelten resultierenden Geschwindigkeit  $U_r$  zu:

$$\text{Re} = \frac{4 U_r H}{\nu} \quad (2.19)$$

Das *Colebrook/White'sche* Widerstandsgesetz hat einen eingeschränkten Gültigkeitsbereich. Die Fließtiefe  $H$  muß mindestens das zweifache der äquivalenten Sandrauheit  $k_s$  betragen (DVWK, Heft 220). Alternativ ist im gegenteiligen Fall die Verwendung anderer empirischer Beiwerte zu empfehlen (vgl. auch Kap. 5.3). Dies sind beispielsweise die Beiwerte nach *Manning* und *de Chezy*,  $n$  und  $C$ , für die in der Literatur umfangreiche Tabellenwerke existieren. Zwischen den einzelnen Beiwerten besteht der folgende Zusammenhang:

$$c_f = \frac{\lambda}{8} = \frac{g n^2}{H^{1/3}} = \frac{g}{C^2} \quad (2.20)$$

Der Koeffizient  $c_f$  beschreibt den üblicherweise postulierten quadratischen Zusammenhang zwischen der Sohlschubspannung  $\tau_a$  und der mittleren Fließgeschwindigkeit. Es ist:

$$\frac{\tau_a}{\rho} = U_r^2 = c_f U_r^2 \quad (2.21)$$

In der Herleitung der Flachwassergleichungen wurden mit Hilfe der Gleichung 2.12 die viskosen und turbulenten Terme an der unteren Integrationsgrenze durch die Sohlschubspannung ausgedrückt. Damit wird der Sohlreibungswiderstand als äußere Kraft in den Flachwassergleichungen berücksichtigt:

$$F_{a,i} = -\frac{\tau_{a,i}}{\rho H} = -\frac{1}{H} c_f U_i U_r \quad (i = 1, 2) \quad (2.22)$$

### 2.4.1.3 Durchströmter Bewuchs

Der Einfluß der im Hochwasserfall am Abfluß beteiligten und teilweise bewaldeten Vorlandflächen in natürlichen Fließgewässern auf das Strömungsgeschehen wurde in dem DFG-Schwerpunktprogramm "Anthropogene Einflüsse auf hydrologische Prozesse" (ROUVÉ, 1987) umfangreich untersucht und als Ergebnis in einem eindimensionalen Berechnungsverfahren zusammengefaßt. Die Berechnungsansätze für durchströmte Rauheitszonen nach PASCHE (1984) und LINDNER (1982) lassen sich mit geringen Modifikationen auch in der zweidimensional-tiefengemittelten Strömungsmodellierung verwenden.

Der Widerstandsbeiwert  $\lambda_p$  berechnet sich als Funktion der Fließtiefe  $H$ , dem mittleren Bewuchsdurchmesser  $d_p$ , dem mittleren Bewuchsabstand  $a_p$  und einem Formbeiwert  $c_{WR}$ :

$$\lambda_p = \frac{4 H d_p}{a_p^2} c_{WR} \quad (2.23)$$

Der Formbeiwert faßt den sich überlagernden Einfluß einer Gruppe von umströmten Zylindern und den Einfluß von Schwerewellen auf den Gesamtwiderstand zusammen:

$$c_{WR} = 1,31 \cdot c_{W\infty} \cdot U_*^2 + \frac{2}{Fr^2} \cdot (1 - H_*) \quad (2.24)$$

Der Formbeiwert  $c_{W\infty}$  eines überströmten Kreiszyllinders kann dabei nach SCHLICHTING (1958) mit der Reynoldszahl des Kreiszyllinders  $Re_p = U_r d_p / \nu$  bestimmt werden.  $U_r$  ist die tiefengemittelte Anströmgeschwindigkeit. Eine gute analytische Näherung gibt die folgende Abschätzung:

$$c_{W\infty} = \begin{cases} 3,07 Re_p & \leq Re_p < 800 \\ 1,0 & 800 \leq Re_p < 6.000 \\ 1,0 + 0,2(Re_p - 6000)/5000 & 6.000 \leq Re_p < 11.000 \\ 1,2 & 11.000 \leq Re_p \end{cases} \quad (2.25)$$

Die relative Anströmgeschwindigkeit  $U_*$  ergibt sich nach PASCHE (in ROUVÉ, 1987) als Funktion der Nachlauflänge  $a_{NL}$  und der Nachlaufbreite  $a_{NB}$  aus den Gleichungen 2.26 bis 2.28:<sup>2</sup>

$$U_*^2 = 1,151 \cdot \left( \frac{a_{NL}}{a_p} \right)^{-0,483} + 0,5 \cdot \left( \frac{a_{NB}}{a_p} \right)^{1,1} \quad (2.26)$$

$$30,0 = \left[ \frac{a_{NL}}{c_{W\infty} \cdot d_p} \right]^{0,7} \cdot \left[ 1 + \frac{a_{NL}}{4,0H} \cdot (\lambda_a + \lambda_p) \right]^{1,5} \quad (2.27)$$

$$a_{NB} = 0,24 \cdot a_{NL}^{0,59} \cdot (c_{W\infty} \cdot d_p)^{0,41} \quad (2.28)$$

Das Fließtiefenverhältnis  $H_*$  konnte mit der von LINDNER (1982) angegebenen Gleichung

$$Fr^2 = \frac{H_* \cdot (H_*^2 - 1)}{2,0 \cdot \left( H_* - \frac{a_p}{a_p - d_p} \right)} \quad (2.29)$$

nicht zufriedenstellend berechnet werden. Gleichung 2.29 ist ein Polynom dritten Grades in  $H_*$ , das sich unter Vernachlässigung der hydrostatischen und hydrodynamischen Kräfte über eine Impulsbilanzbetrachtung an einem umströmten Kreiszyylinder ergibt. Eine Analyse ergab, daß Gleichung 2.29 bei bestimmten Verbauverhältnissen:

$$\alpha_p = \frac{d_p}{a_p} \quad (2.30)$$

und Froudezahlen  $Fr$  keine physikalisch sinnvolle Lösung hat (Abb. 2.3).

---

<sup>2</sup> Die Gleichungen von PASCHE wurden zur Elimination des Energieliniengefälles leicht modifiziert.

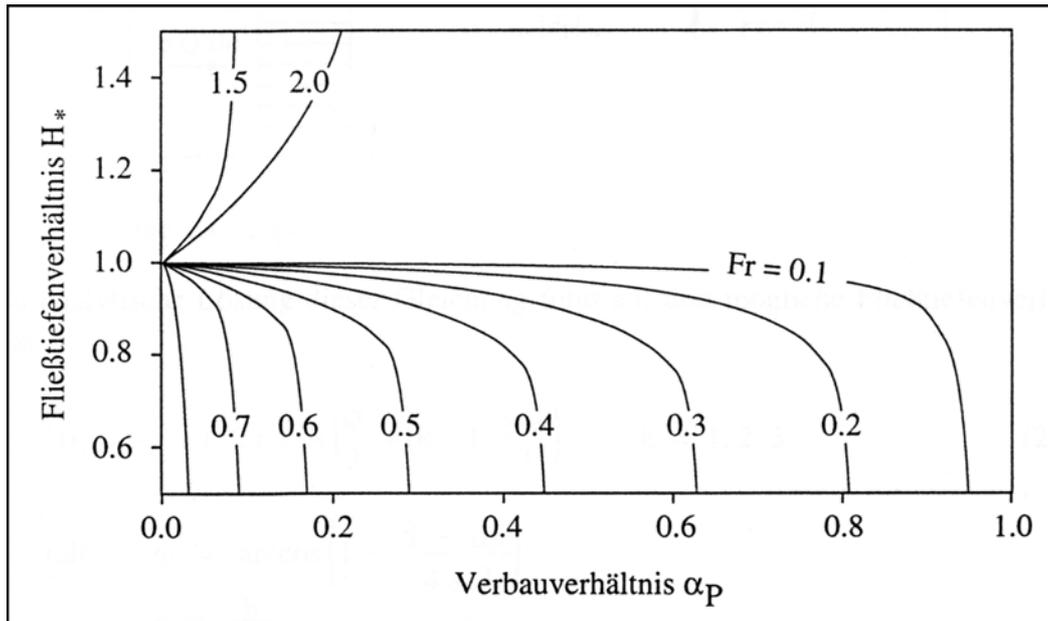


Abb. 2.3: Fließtiefenverhältnis nach LINDNER (Gl. 2.29)

Die Impulsbilanzgleichung an einem umströmten Kreiszyylinder wurde aus diesem Grund neu formuliert, wobei die hydrostatische und -dynamische Last des Zylinders berücksichtigt wurde (Abb. 2.4 und Gl. 2.31).

$$\rho Q(U_u - U_o) = \frac{1}{2} \rho g (H_o^2 - H_u^2) (a_p - d_p) - \frac{1}{2} \rho c_{W\infty} d_p H_o U_o^2 \quad (2.31)$$

Mit der Kontinuitätsbedingung:  $Q = U_o H_o a_p = U_u H_u a_p$

der Froudezahl:  $Fr = \frac{U_u}{\sqrt{g H_u}}$

und dem Fließtiefenverhältnis:  $H_* = \frac{H_u}{H_o}$

ergibt sich aus Gleichung 2.31:

$$H_*^3 \cdot Fr^2 \cdot \left(1 - \frac{c_{W\infty}}{2} \cdot \alpha_p\right) - H_*^2 \cdot \left(Fr^2 + \frac{1 - \alpha_p}{2}\right) + \frac{1 - \alpha_p}{2} = 0 \quad (2.32)$$

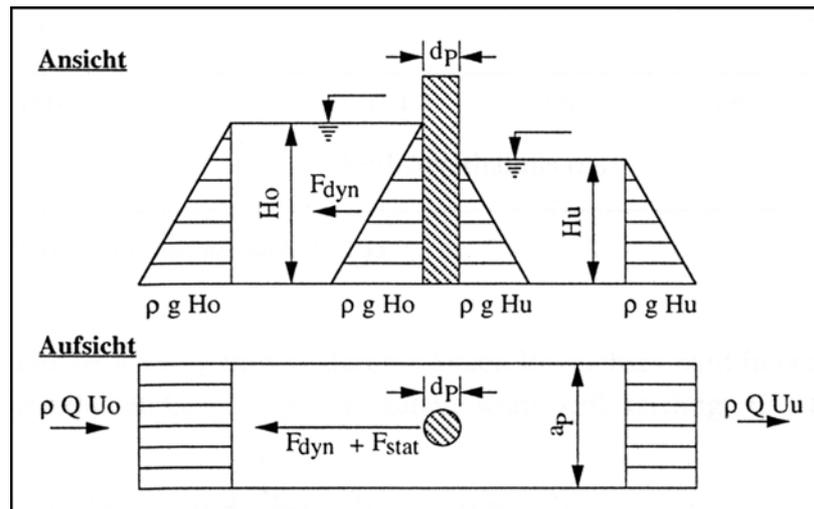


Abb. 2.4: Definitionsskizze zur Impulsbilanz an einem umströmten Kreiszyylinder

Eine analytische Lösung dieser Gleichung führt auf drei mögliche Fließtiefenverhältnisse:

$$H_{*,k} = r + 2 \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{3} + (k-1)\frac{2\pi}{3}\right) \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.33)$$

$$\text{mit: } \varphi = \arccos\left(1 - \frac{1 - \alpha_p}{4ar^3}\right)$$

$$r = \frac{b}{3a}$$

$$a = Fr^2 \cdot \left(1 - \frac{c_{W\infty}}{2} \alpha_p\right)$$

$$b = Fr^2 + \frac{1 - \alpha_p}{2}$$

Von diesen drei Lösungen liegt jeweils eine in einem physikalisch sinnvollen Bereich (vgl. Abb. 2.5). Bei strömenden Abflußverhältnissen ( $Fr < 1,0$ ) ist die dritte Lösung ( $k = 3$ ), bei schießenden Abflußverhältnissen ( $Fr > 1,0$ ) die erste Lösung ( $k = 1$ ) von physikalischer Bedeutung.

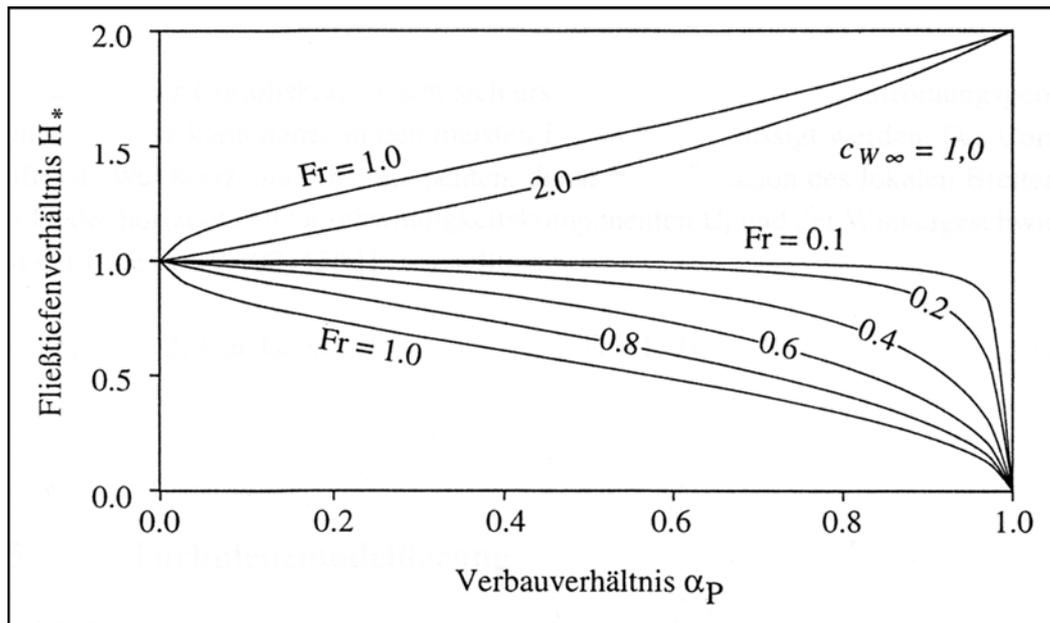


Abb. 2.5: Fließtiefenverhältnis nach Gl. 2.33

Der Widerstandsbeiwert  $\lambda_P$  infolge durchströmten Bewuchses wird in den zweidimensional tiefengemittelten Gleichungen als äußere Kraft berücksichtigt. Es ist:

$$F_{P,i} = -\frac{\tau_{P,i}}{\rho H} = -\frac{1}{H} \frac{\lambda_P}{8} U_i U_r \quad (i = 1, 2) \quad (2.34)$$

### 2.4.2 Windschubspannungen

Die Berücksichtigung von Windschubspannungen an der freien Oberfläche erfolgt bis auf das Vorzeichen in völliger Analogie zu den Sohlschubspannungen. Die viskosen und turbulenten Terme werden an der freien Oberfläche durch die Windschubspannung ersetzt. Diese berechnet sich aus der Windgeschwindigkeit  $U_W$  und einem empirischen Reibungskoeffizienten  $k_W = 0,0002$  zu (KING, 1976):

$$\tau_{W,i} = \rho k_{W,i} U_{W,i} U_{W,r} \quad (i = 1, 2) \quad (2.35)$$

In den Flachwassergleichungen wird der Wind als äußere Kraft berücksichtigt:

$$F_{W,i} = \frac{\tau_{W,i}}{\rho H} \quad (2.36)$$

### 2.4.3 Corioliskraft

Der Einfluß der Corioliskraft macht sich erst bei weit ausgedehnten Strömungsgebieten bemerkbar. Sie kann daher in den meisten Fällen vernachlässigt werden. Die Corioliskraft hat zwei horizontale Komponenten, die sich als Funktion des lokalen Breitengrades  $\Theta$ , der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten  $U_i$  und der Winkelgeschwindigkeit der Erde  $\omega = 72,92 \cdot 10^{-6}$  Hz darstellt:

$$F_{C,x} = 2,0 \cdot \omega \cdot V \cdot \sin \Theta \quad (2.37a)$$

$$F_{C,y} = -2,0 \cdot \omega \cdot U \cdot \sin \Theta \quad (2.37b)$$

## 2.5 Turbulenzmodellierung

Die Modellierung der turbulenten Austauschterme wird zur Schließung der Reynoldsgleichungen benötigt. Die unterschiedlichen Ansätze lassen sich grob in zwei Klassen einteilen: Erstens, Turbulenzmodelle die auf dem Wirbelviskositätsansatz von *Boussinesq* beruhen und damit eine Isotropie der turbulenten Strukturen voraussetzen. Zweitens, Turbulenzmodelle, die die turbulenten Fluktuationen direkt simulieren. Eine andere gebräuchliche Einteilung verwendet die Anzahl der Transportgleichungen, die zusätzlich zu den Strömungsgleichungen gelöst werden müssen. Die Turbulenzmodelle werden damit als Null-, Ein-, Zweigleichungsmodelle, usw. eingestuft. Abbildung 2.6 ordnet die im folgenden beschriebenen Ansätze den jeweiligen Klassen zu.

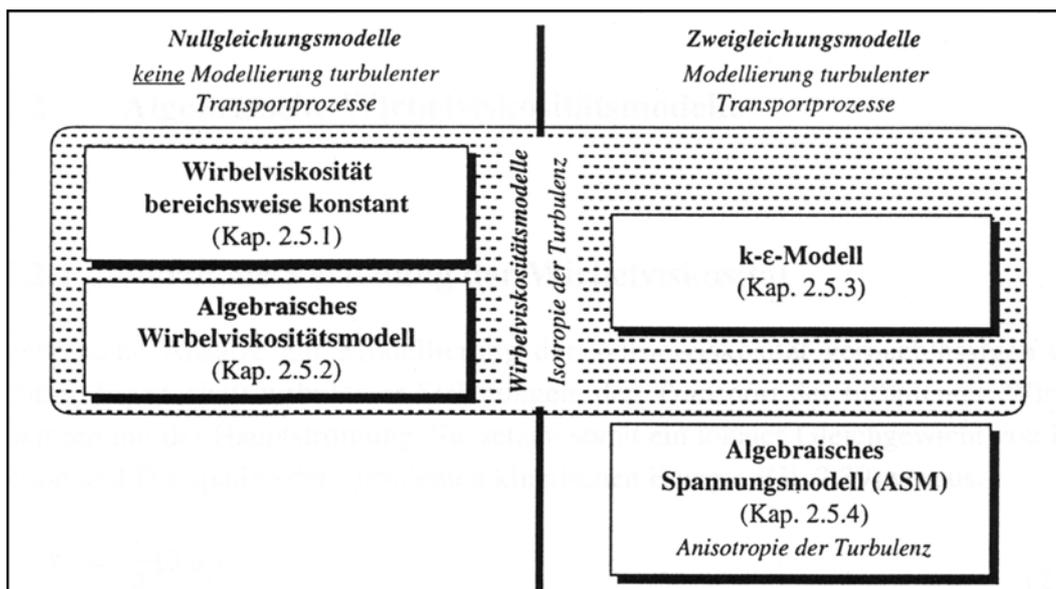


Abb. 2.6: Klassifizierung der implementierten Turbulenzmodelle

## 2.5.1 Das Wirbelviskositätsprinzip

Aufgrund der Erkenntnis, daß die Reynoldsspannungen eine ähnliche Wirkung auf das Strömungsgeschehen haben wie eine innere Reibungskraft, formulierte *Boussinesq* 1877 sein Wirbelviskositätsprinzip (Gl. 2.38). In Analogie zur molekularen Viskosität  $\nu$  definiert dieses Prinzip die Wirbelviskosität  $\nu_t$  als Proportionalitätsfaktor, mit dem die Reynoldsspannungen an die Gradienten der mittleren Strömungsgeschwindigkeit geknüpft werden. Dieser Faktor ist keine konstante Stoffeigenschaft, sondern variiert mit dem Strömungsfeld und ist von der Strömungsgeometrie und von Parametern wie der Reynoldszahl abhängig.

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \cdot \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (2.38)$$

Allein das Wirbelviskositätsprinzip ist noch kein vollständiges Turbulenzmodell. Es reduziert jedoch die Anzahl der unbekanntenen Turbulenzgrößen auf die Ermittlung des Proportionalitätsfaktors  $\nu_t$ . Im einfachsten Ansatz wird die Wirbelviskosität  $\nu_t$  bereichsweise konstant angenommen und zum Beispiel mit experimentellen Daten kalibriert.

Die Kalibrierung der Wirbelviskosität ist, selbst wenn ausreichend experimentelle Daten zur Verfügung stehen, mit großem Aufwand verbunden, da sie gleichzeitig mit den Sohlrauheiten durchgeführt werden muß. Hier bewirken selbst die einfachsten algebraischen Ansätze eine nicht zu unterschätzende vereinfachte Handhabung des hydrodynamisch-numerischen Modells.

## 2.5.2 Algebraische Wirbelviskositätsmodelle

### 2.5.2.1 Vertikale Verteilung der Wirbelviskosität

Algebraische Ansätze zur Modellierung der Wirbelviskosität vernachlässigen eine wichtige Eigenschaft turbulenter Strömungen, den Transport der turbulenten Wirbelstrukturen mit der Hauptströmung. Sie setzen somit ein lokales Gleichgewicht von Produktion und Dissipation der turbulenten kinetischen Energie (Gl. 2.39) voraus.

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_j} \quad (2.39)$$

Trotz dieser Einschränkung haben diese Modelle eine nicht unerhebliche praktische Bedeutung, da sie zum einen mit äußerst geringem Aufwand eine Abschätzung der Wirbelviskosität liefern, und zum anderen eine Möglichkeit zur Initialisierung komplexerer Turbulenzmodelle bieten. Eine gute Initialisierung ist zum Beispiel bei dem im nächsten Kapitel (2.5.3) beschriebenen  $k$ - $\epsilon$ -Modell Voraussetzung, um mit nu-

merischen Verfahren die nicht-linearen Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie  $k$  und deren Dissipationsrate  $\varepsilon$  lösen zu können (Konvergenzradius). In diesem Abschnitt werden daher neben den algebraischen Gleichungen für die Wirbelviskosität  $\nu_t$  auch die korrespondierenden Gleichungen für  $k$  und  $\varepsilon$  gegeben. Den Zusammenhang zwischen diesen drei Größen stellt die Kolmogorov-Prandtl-Beziehung<sup>3</sup> (Gl. 2.40) über einen Proportionalitätsfaktor  $c_\mu c_D$  her (üblich:  $c_\mu = 0,09$  und  $c_D = 1,0$ ; siehe auch Konstanten des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells in Kapitel 2.5.3.1):

$$\nu_t = c_\mu c_D \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.40)$$

Bei stark vereinfachten Strömungsverhältnissen, wie einer zweidimensionalen stationär-gleichförmigen Kanalströmung, lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen erheblich vereinfachen (vgl. Kap. 2.4.1.1). Mit diesen vereinfachten Ansätzen gelingt eine Abschätzung der turbulenten Terme zur Schließung der Reynoldsgleichungen. Hinsichtlich der Turbulenz weist solch eine Strömung drei charakteristische Bereiche auf (s. Abb. 2.7 nach NEZU und NAKAGAWA, 1993).

Im sohlnahen Bereich, der viskosen Unterschicht mit einem dimensionslosen Wandabstand von:

$$x_n^+ = \frac{x_n U_\tau}{\nu} \leq 50 \quad (2.41)$$

wird das Turbulenzverhalten durch die Sohlschubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau$  und die innere Reibung  $\nu$  (Viskosität) dominiert. Hier übersteigt die Produktion  $P$  die Dissipation  $\varepsilon$  der turbulenten kinetischen Energie. Aufgrund der sehr steilen Geschwindigkeitsgradienten wird dieser Bereich in der numerischen Simulation durch das logarithmische Wandgesetz überbrückt.

In der Außenschicht  $x_n^+ > 50$  (Übergangsbereich und Oberflächenbereich) ist der viskose Einfluß auf die Turbulenz zu vernachlässigen. Im Oberflächenbereich dominiert der Einfluß der Fließtiefe und der maximalen Fließgeschwindigkeit. Hier überwiegt die Dissipation; es findet somit ein Transport von Turbulenzenergie aus sohlnahen Bereichen zur freien Oberfläche statt. Im Übergangsbereich ist die Turbulenz annähernd im lokalen Gleichgewicht, Produktion und Dissipation nehmen hier die gleiche Größenordnung an. Dieser Bereich wird sehr gut durch das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz beschrieben (s. Kap. 2.4.1.1).

---

<sup>3</sup> Die Kolmogorov-Prandtl-Beziehung  $\nu_t = c_\mu k^{1/2} L$  besagt, daß die Wirbelviskosität einem Geschwindigkeits- und einem Längenmaß der turbulenten Bewegung proportional ist, wobei das Geschwindigkeitsmaß mit der Quadratwurzel der turbulenten kinetischen Energie bestimmt wird. Das Längenmaß  $L$  läßt sich über die Dissipationsrate  $\varepsilon$  ausdrücken (s. Gl. 2.59).

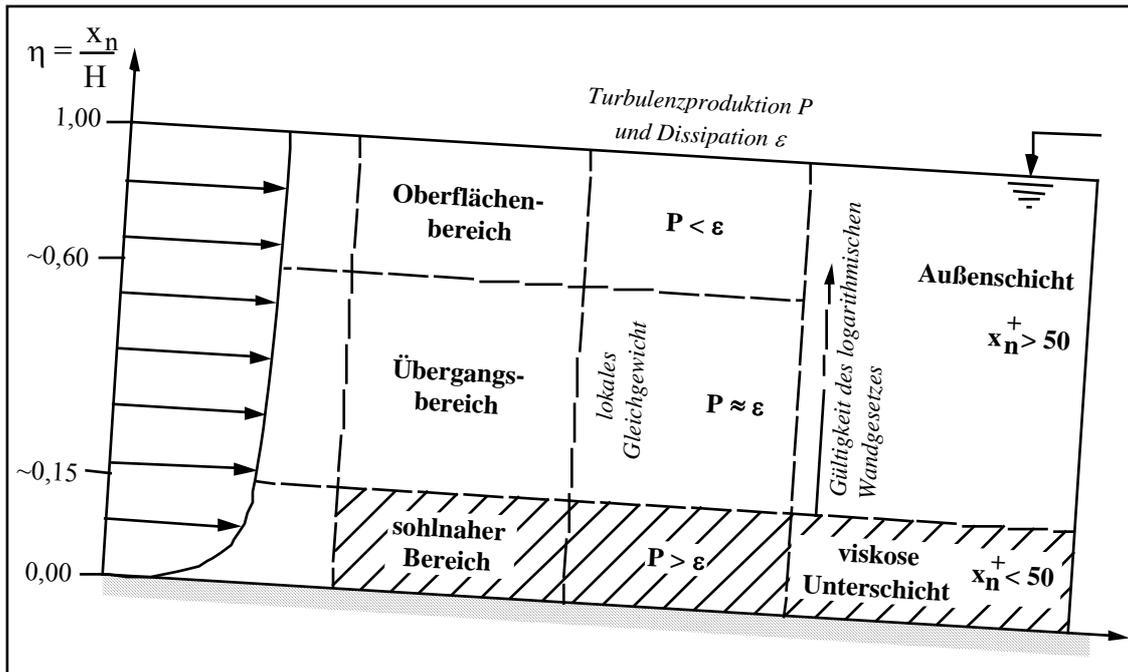


Abb. 2.7: Offene stationär-gleichförmige Kanalströmung

Für den Bereich des turbulenten Gleichgewichts ( $P \approx \varepsilon$ ) ergibt sich mit Hilfe des logarithmischen Wandgesetzes eine Gleichung für die Dissipation der turbulenten kinetischen Energie  $\varepsilon$  (NEZU und NAKAGAWA, 1993):

$$\frac{\varepsilon H}{U_\tau^3} = \frac{1 - \eta}{\kappa \eta} \quad \text{mit: } \eta = \frac{x_n}{H} \quad (2.42)$$

Die Wirbelviskosität  $\nu_t$  wird sehr gut durch einen parabolischen Funktionsverlauf angenähert; einem Ansatz der sich bei verschiedenen Autoren wiederfindet (z.B.: VAN RIJN, 1986 und WANG, 1991).

$$\frac{\nu_t}{H U_\tau} = \kappa \eta (1 - \eta) \quad (2.43)$$

Diese Gleichungen (2.42 und 2.43) sind für die untere Hälfte des Fließquerschnitts gültig ( $0 \leq \eta \leq 0,5$ ). Der obere Bereich schließt sich mit den konstanten Werten für  $\eta = 0,5$  an. Aus den beiden Gleichungen ergibt sich mit der Kolmogorov-Prandtl Beziehung (Gl. 2.40) ein Ansatz für die turbulente kinetische Energie:

$$\frac{k}{U_\tau^2} = \frac{1 - \eta}{\sqrt{c_\mu}} \quad (2.44)$$

Eine von NEZU und NAKAGAWA (1993) durchgeführte Auswertung verschiedener experimenteller Untersuchungen zeigt, daß die folgenden halb-empirischen Gleichungen die tatsächlichen Verhältnisse besser beschreiben:

$$\frac{k}{U_\tau^2} = D_k \cdot \exp(-2,0 \cdot \eta) \quad (2.45)$$

$$\frac{\varepsilon H}{U_\tau^3} = D_\varepsilon \cdot K \cdot \frac{1}{\sqrt{\eta}} \cdot \exp(-3,0 \cdot \eta) \quad (2.46)$$

Die empirischen Konstanten nehmen einen Wert von  $D_k = 4,78$  und  $D_\varepsilon = 12,2$  an. Der Koeffizient  $K$  läßt sich für Reynoldszahlen

$$\text{Re}_L = \frac{\sqrt{\overline{uu}} \cdot L}{\nu} > 200 \quad (2.47)$$

$$\frac{\overline{uu}}{U_\tau} = 2,3 \cdot \exp(-\eta) \quad (2.47a)$$

genügend genau als Funktion des turbulenten Längenmaßes  $L$  angeben (Gl. 2.48), wobei  $L$  durch eine "Rampenfunktion" angenähert werden kann (Gl. 2.49).

$$K = 0,691 + 3,98 \frac{1}{\sqrt{\text{Re}_L}} \quad (2.48)$$

$$L = \begin{cases} H\sqrt{\eta} & \eta < 0,6 \\ 0,77H & \eta \geq 0,6 \end{cases} \quad (2.49)$$

Diese Gleichungen (2.45 und 2.46) sind uneingeschränkt über die gesamte Fließtiefe anwendbar. Auch hier läßt sich mit der Kolmogorov-Prandtl Beziehung (Gl. 2.40) ein korrespondierender Ansatz für die Wirbelviskosität formulieren.

Eine Illustration der beiden algebraischen Gleichungen zur Berechnung einer vertikalen Verteilung der Wirbelviskosität und der Turbulenzgrößen  $k$  und  $\varepsilon$  ist mit Abbildung 2.8 gegeben. Der Koeffizient  $K$  in Gl. 2.46 wurde hierzu konstant mit  $K = 0,691$  angenommen, was einer hohturbulenten Strömung entspricht. Die Abweichungen zwischen den Gleichungen nehmen in Sohlhöhe zu. Hier wird die Wirbelviskosität nach Gl. 2.45 und 2.46 gegenüber Gl. 2.43 wesentlich größer abgeschätzt.

Eine weitere häufige Abschätzung der Turbulenzgrößen als Randbedingung im Einlaufquerschnitt oder als Initialisierungswerte beruht auf der Verteilung des Mischungsweges  $\ell_m$  nach der Nikuradse-Formel (Gl. 2.50 aus SCHLICHTING, 1958). Sie soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben.

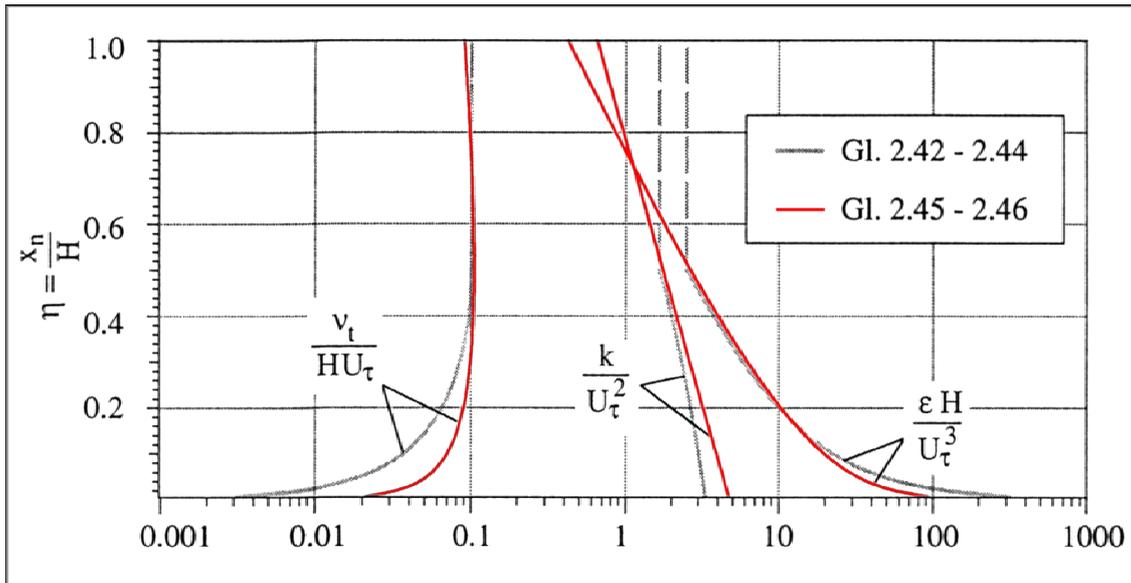


Abb. 2.8: Verlauf der turbulenten Größen  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $v_t$  - algebraische Modelle

$$\frac{\ell_m}{H} = 0,14 - 0,08 \cdot (1 - \eta)^2 - 0,06 \cdot (1 - \eta)^4 \quad (2.50)$$

Diese Gleichung kann unter Verwendung der mit Gleichung 2.51 und 2.52 gegebenen Zusammenhänge zwischen dem Mischungsweg  $\ell_m$  und dem turbulenten Längenmaß  $L$  zur Abschätzung der Dissipation  $\varepsilon$  verwendet werden (RODI, 1978). Zusätzlich muß jedoch die turbulente kinetische Energie  $k$  vorgegeben werden. Dies erfolgt nach einer Studie von NALLASAMY (1987) bei vielen Autoren häufig über experimentelle Daten oder über eine Abschätzung der Turbulenzintensität (z.B.:  $k = 0,003 U^2$ ). Dies ist auch die Vorgehensweise von SCHULTE (1989) bei der Festlegung von Einlaufbedingungen zur Simulation abgelöster turbulenter Strömungen.

$$\ell_m = \left( \frac{c_\mu^3}{c_D} \right)^{1/4} \cdot L \quad (2.51)$$

$$\varepsilon = c_D \frac{k^{3/2}}{L} \quad (2.52)$$

### 2.5.2.2 Tiefengemittelter Ansatz

Für die zweidimensional-tiefengemittelte Betrachtung ergeben sich unter der gleichen Voraussetzung eines lokalen Gleichgewichts von Produktion und Dissipation der turbulenten kinetischen Energie ähnliche Beziehungen für die Turbulenzgrößen. Da in ausgesprochenen Flachwasserströmungen die Turbulenz vorwiegend über Sohlrauheiten induziert wird, erfolgt in diesem Zusammenhang eine Gleichsetzung

der Dissipation mit dem sekundären Quellterm  $P_{kV}$  der tiefengemittelten Gleichung für die turbulente kinetische Energie (s. Kap. 2.5.3.2):

$$\varepsilon = P_{kV} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} \frac{U_\tau^3}{H} \quad (2.53)$$

Der Reibungskoeffizient  $c_f$  läßt sich über unterschiedliche Ansätze aus den örtlichen Rauheitsverhältnissen der Gerinnesohle abschätzen (s. Kap. 2.4, Gl. 2.20). Die turbulente kinetische Energie  $k$  ergibt sich in Folge zu:

$$k = c_{2\varepsilon} \frac{P_{kV}^2}{P_{\varepsilon V}} = \frac{\sqrt{e^*} \sigma_t}{c_f^{1/4} \sqrt{c_\mu}} U_\tau^2 \quad (2.54)$$

Die turbulente Schmidtzahl  $\sigma_t$  definiert das Verhältnis zwischen der Wirbelviskosität  $\nu_t$  und der turbulenten Diffusivität  $e_t$ . Sie wird in den meisten Anwendungsfällen mit einem Wert von  $\sigma_t = 0,5$  angesetzt, kann jedoch nach experimentellen Untersuchungen von ARNOLD et al. (1989) in natürlichen Gewässern bis auf einen Wert von  $\sigma_t = 1,0$  ansteigen. Die dimensionslose Diffusivität

$$e^* = \frac{e_t}{HU_\tau} \quad (2.55)$$

nimmt nach Ausbreitungsversuchen in Laborgerinnen und in der Natur einen Wertebereich von  $0,075 < e^* < 0,9$  an. Diese große Schwankungsweite ist auf den gerinnespezifischen Einfluß der durch Sekundärströmungen verursachten Dispersion zurückzuführen, die sich bei den üblicherweise in tiefengemittelter Form vorliegenden Ergebnissen von Ausbreitungsversuchen nicht eliminieren lassen.

In diesen Gleichungen für  $k$  und  $\varepsilon$  ist nach Empfehlungen des ASCE TASK COMMITTEE (1988) bereits eine Gleichung für die Wirbelviskosität  $\nu_t$  verwendet worden, mit der diese proportional zur Fließtiefe und zur Sohlschubspannungsgeschwindigkeit gesetzt wird:

$$\nu_t = e^* \sigma_t HU_\tau \quad (2.56)$$

## 2.5.3 Das k-ε-Modell

### 2.5.3.1 Allgemeine Formulierung

Die zuvor beschriebenen algebraischen Wirbelviskositätsmodelle leiten sich aus stark vereinfachten Strömungsfällen her. Im allgemeinen werden sie den Verhältnissen in einer realen komplexeren Strömung nicht mehr gerecht. Denn dort ist ei-

ne wesentliche Eigenschaft, der Transport der turbulenten Wirbelstrukturen mit der Hauptströmung, von nicht zu vernachlässigender Bedeutung.

Ein Maß für die Turbulenz in einer Strömung ist die turbulente kinetische Energie  $k$  (Gl. 2.39). Eine Gleichung für  $k$  läßt sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen (Gl. 2.1) ableiten, indem diese mit der momentanen Fließgeschwindigkeit  $\hat{u}_i$  erweitert und anschließend statistisch gemittelt werden (Gl. 2.57, z.B. HINZE, 1975).

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} &= - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u_j \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u_i u_j}{2} \right)} \right] + \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ \text{zeitliche} & \quad \text{advektiver} & \quad \text{turbulente} & \quad \text{Produktion} \\ \text{Änderung} & \quad \text{Transport} & \quad \text{Diffusion} & \quad \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$+ \nu \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) - \nu \cdot \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad (2.57)$$

*molekulare Diffusion*                      *molekulare Dissipation*

Aufgrund der unbekanntenen Korrelationen in Gleichung 2.57 müssen weitere Modellannahmen getroffen werden, um eine geschlossene Gleichung für die turbulente kinetische Energie zu erhalten (RODI, 1978).

Zunächst können die unbekanntenen Reynoldsspannungen im Produktionsterm über das Wirbelviskositätsprinzip von *Boussinesq* ausgedrückt werden. Die turbulente Diffusion wird in Analogie zur Diffusion in der Stofftransportgleichung an den Gradienten der turbulenten kinetischen Energie geknüpft:

$$\overline{u_j \left( \frac{p}{\rho} + \frac{u_i u_j}{2} \right)} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (2.58)$$

Die molekulare Dissipation kann durch folgenden Ausdruck modelliert werden:

$$\varepsilon = \nu \cdot \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = c_D \frac{k^{3/2}}{L} \quad (2.59)$$

Dies setzt jedoch die empirische Vorgabe des turbulenten Längenmaßes  $L$  voraus, was nur für sehr einfache Strömungsgeometrien gelingt. Aus diesem Grund besitzen sogenannte Eingleichungsmodelle, bei denen neben der Transportgleichung für  $k$  algebraische Ansätze für das Längenmaß  $L$  verwendet werden, kaum Allgemeingültigkeit. Eine Verbesserung ist von Zweigleichungsmodellen zu erwarten, die eine weitere Transportgleichung zur Beschreibung des turbulenten Längenmaßes lösen. Von den verschiedenen Zweigleichungsmodellen hat sich das  $k$ - $\varepsilon$ -Modell durchgesetzt. Gründe hierfür, wie eine größere Universalität der Konstanten, nennen zum Beispiel LAUNDER und SPALDING (1974).

Auch für die Dissipationsrate  $\varepsilon$  läßt sich eine exakte Gleichung aus den Navier-Stokes-Gleichungen herleiten. Gegenüber der  $k$ -Gleichung (2.57) müssen jedoch wesentlich mehr Modellannahmen für unbekanntes Korrelationen getroffen werden (RODI, 1978). Die endgültige modellierte Form der  $k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen lautet ( $i, j = 1, 2, 3$ ):

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \varepsilon \quad (2.60)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.61)$$

$$P = -\overline{u_i u_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = v_t \cdot \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (2.62)$$

Der Quellterm  $P$  beschreibt die Produktion von turbulenter kinetischer Energie aus den mittleren Strömungsgrößen. Die empirischen Konstanten in diesen Gleichungen wurden durch umfangreiche experimentelle Untersuchungen festgelegt (LAUNDER und SPALDING, 1974) und haben sich unverändert in vielen unterschiedlichen Strömungssituationen bewährt (Tabelle 2.9).

Tab. 2.9: Konstanten des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells

$\kappa$	$c_\mu$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$	$c_{1\varepsilon}$	$c_{2\varepsilon}$
0,41	0,09	1,20	1,20	1,44	1,92
0,43	0,09	1,00	1,30	1,44	1,92

### 2.5.3.2 Tiefengemittelte Version

Eine Version des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells für die tiefengemittelte Strömungsmodellierung wurde von RASTOGI und RODI (1978) entwickelt. Der Einfluß einer vertikalen Ungleichförmigkeit der turbulenten Größen  $k$  und  $\varepsilon$  wird dabei mit den Integrationskonstanten zu jeweils einem zusätzlichen Quellterm in beiden Gleichungen zusammengefaßt, der hauptsächlich die hohen Geschwindigkeitsgradienten in Sohlnähe umfaßt:

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \varepsilon + P_{kv} \quad (2.63)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} + P_{\varepsilon V} \quad (2.64)$$

Wobei  $P$  mit  $i, j = 1, 2$  die Produktion der turbulenten kinetischen Energie  $k$  nach Gleichung 2.62 beschreibt. Die beiden sekundären Produktionsterme  $P_{kV}$  und  $P_{\varepsilon V}$  werden als Funktion der Sohlschubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau$  und der Fließtiefe  $H$  ausgedrückt (Gl. 2.65 und 2.66). Die empirischen Konstanten ermittelten RASTOGI und RODI aus den Bedingungen in einer stationär-gleichförmigen Strömung. Sie verwendeten hierbei die experimentellen Daten von LAUFER (1951) zur Abschätzung der tiefengemittelten Wirbelviskosität. Das ASCE TASK COMMITTEE (1988) schlägt demgegenüber vor, die Wirbelviskosität über die dimensionslose Diffusivität  $e^*$  und die Schmidtzahl  $\sigma_t$  auszudrücken (Gl. 2.56). Mit dem letzteren Ansatz ergeben sich die sekundären Produktionsterme zu:

$$P_{kV} = c_k \frac{U_\tau^3}{H} = \frac{1}{\sqrt{c_f}} \frac{U_\tau^3}{H} \quad (2.65)$$

$$P_{\varepsilon V} = c_\varepsilon \frac{U_\tau^4}{H^2} = \frac{c_{2\varepsilon} \cdot \sqrt{c_\mu}}{c_f^{3/4} \cdot \sqrt{e^*} \cdot \sigma_t} \frac{U_\tau^4}{H^2} \quad (2.66)$$

Hierin ist  $c_f$  der Reibungskoeffizient nach Gleichung 2.20. Die übrigen Konstanten ergeben sich aus den bisherigen Ausführungen.

#### 2.5.4 Algebraisches Spannungsmodell (ASM)

Die bisher beschriebenen Turbulenzmodelle setzen eine Isotropie der Wirbelviskosität voraus. Dies trifft auf allgemeine Strömungen jedoch nicht mehr zu. So werden beispielsweise Sekundärströmungen in geraden gegliederten Gerinnen durch die Anisotropie der Wirbelviskosität hervorgerufen (NEZU und NAKAGAWA, 1993). Bereits 1945 wurden daher von CHOU die exakten Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen abgeleitet. Diese Gleichungen enthalten jedoch Korrelationen höherer Ordnung, so daß zusätzliche Modellannahmen zur Schließung der Reynoldsspannungsgleichungen eingeführt werden müssen. Auf dieser Grundlage entwickelten LAUNDER, REECE und RODI (1975) eine modellierte Form der Transportgleichungen für die Reynoldsspannungen  $\rho u_i u_j$  (RSM = Reynolds-stress model).

Die Simulation allgemeiner dreidimensionaler Strömungsvorgänge erfordert mit diesem Modell die Lösung von sechs unabhängigen Transportgleichungen für  $\rho u_i u_j$  sowie einer zusätzlichen Gleichung für die Dissipationsrate  $\varepsilon$ . Der hierfür erforderliche rechentechnische Aufwand ist sehr groß und bedarf weiterhin intensiver Forschungsarbeit; die modellierten Reynoldsgleichungen sind nur für voll turbulente Strömungen anwendbar.

Unter der vereinfachenden Annahme, daß das Verhältnis der einzelnen Reynoldsspannungen zur turbulenten kinetischen Energie im gesamten Strömungsfeld als nahezu konstant angesehen werden kann,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) \approx 0 \quad (2.67)$$

läßt sich der konvektive und der diffusive Transportterm aus dem RSM eliminieren, und es werden algebraische Beziehungen (ASM = algebraic-stress model) für die unabhängigen Reynoldsspannungen erhalten (RODI, 1976):

$$\frac{\overline{u_i u_j}}{k} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (2.68)$$

Die Spannungsproduktion  $P_{ij}$  ist definiert als:

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \cdot \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (2.69)$$

Der Umverteilungsterm  $\Pi_{ij}$  stellt die Korrelationen zwischen den Druckspannungen und der Deformationsgeschwindigkeit her. Dieser Term wird von RODI (1976) in der Herleitung von Gleichung 2.68 mit einem Ansatz modelliert, der nur in der freien Strömung bei einem ausreichenden Abstand von Oberflächen (feste Wänden, freie Oberfläche) gültig ist:

$$\Pi_{ij} = -c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - \alpha \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad (2.70)$$

Hierin sind  $c_1$  und  $\alpha$  Konstanten mit  $c_1 = 1,5$  und  $\alpha = 0,6$  (LAUNDER, REECE und RODI, 1975).  $P$  ist der bereits aus der Gleichung für die turbulente kinetische Energie  $k$  bekannte Produktionsterm (vgl. Gl. 2.62):

$$P = \frac{1}{2} P_{ii} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (2.71)$$

Durch den Einfluß einer Oberfläche werden die turbulenten Fluktuationen normal zur Wand gedämpft und die parallelen Fluktuationen verstärkt. Dieser Einfluß läßt sich durch die Einführung von Wandfunktionen (LAUNDER, REECE und RODI, 1975) und eines Korrekturterms für die freie Oberfläche (SHIR, 1973) in das RSM umgehen. Eine hieraus abgeleitete algebraische Beziehung für die Reynoldsspannungen wurde von NAOT und RODI (1982) vorgestellt und zur Simulation von turbulenzinduzierten Sekundärströmungen mit gutem Erfolg angewendet. Der Umverteilungsterm lautet in ihrem Modell:

$$\begin{aligned}
\Pi_{ij} = & -c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) - \alpha \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \\
& - \beta \left( D_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) - \gamma k \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \\
& + c_3 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u_n u_n} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_n u_i} \delta_{nj} - \frac{3}{2} \overline{u_n u_j} \delta_{ni} \right) f_2
\end{aligned} \tag{2.72}$$

$$D_{ij} = -\overline{u_i u_k} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j u_k} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \tag{2.73}$$

In Gleichung 2.72 ergeben sich die Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $c_1$  und  $c_3$  nach LAUNDER, REECE und RODI:

$$\alpha = 0,7636 - 0,06 f_1 \tag{2.74}$$

$$\beta = 0,1091 + 0,06 f_1 \tag{2.75}$$

$$\gamma = 0,182 \tag{2.76}$$

$$c_1 = 0,1091 + 0,06 f_1 \tag{2.77}$$

$$c_3 = 0,1 \tag{2.78}$$

Desweiteren sind  $f_1$  und  $f_2$  Wandabstandsfunktionen von  $l_e / \Delta$ , wobei  $l_e$  die Dissipationslänge und  $\Delta$  der mittlere Abstand zu den umgebenden Oberflächen ist:

$$f_1 = \frac{l_e^2}{\Delta^2} \tag{2.79}$$

$$f_2 = \left( \frac{l_e}{\left( \frac{1}{\Delta^2} \right)^{-0,5} + 0,16 l_e} \right)^2 \tag{2.80}$$

$$l_e = \frac{c_\mu^{3/4}}{\kappa} \cdot \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \tag{2.81}$$

Insgesamt stellen die algebraischen Spannungsgleichungen (2.68) ein lineares Gleichungssystem für die sechs unabhängigen Reynoldsspannungen dar, das sich mit einem vertretbaren Aufwand lösen läßt. Zusätzlich müssen zwei Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie<sup>4</sup>  $k$  und deren Dissipation  $\varepsilon$  gelöst

---

<sup>4</sup> Im Gegensatz zum RSM ergibt sich die turbulente kinetische Energie beim ASM nicht aus der Summation der drei Normalspannungen  $\overline{u_i u_i}$ , da im algebraischen Modell auf diesem Weg nur die Identität  $k = k$  erhalten wird.

werden. Hierzu wird üblicherweise das  $k$ - $\varepsilon$ -Modell (Gl. 2.60 bis 2.62) verwendet, wobei der Produktionsterm jedoch nicht mit dem Wirbelviskositätsprinzip vereinfacht werden braucht.

Einen gewissen zusätzlichen Aufwand stellt die Berücksichtigung der freien Oberfläche in dem Umverteilungsterm (letzter Term in Gl. 2.72: Korrektur nach SHIR) dar, da hier die Reynoldsspannungen nicht in kartesischen Koordinaten, sondern in Koordinaten der freien Oberfläche formuliert sind. Hier wird eine Rotation der Geschwindigkeitsvektoren und des Reynoldsspannungstensors für jeden Oberflächenpunkt erforderlich. Daher wenden NAOT und RODI diesen Term nur auf Punkte an der freien Oberfläche an. Der Einfluß einer nahen festen Wand wird ausreichend genau über die Wandabstandsfunktion  $f_1$  erfaßt.

### 3 Numerisches Lösungsverfahren

#### 3.1 Methode der Finiten Elemente

Die räumliche Diskretisierung der Differentialgleichungen erfolgt mit der Methode der Finiten Elemente, die zeitliche Diskretisierung mit einem Finite Differenzen Ansatz. Die Wahl dieser gemischten Modellierung findet folgende Begründung: Die Methode der Finiten Elemente ist hinsichtlich der Diskretisierungsmöglichkeiten unregelmäßiger Geometrien weitaus flexibler, was eine wesentliche Voraussetzung für die Modellierung naturnaher Fließgewässer ist. In Richtung der Zeitachse erfolgt die Diskretisierung völlig regelmäßig. Die Verwendung Finiter Elemente würde daher keine Vorteile bieten, sondern nur den Rechenaufwand unnötig erhöhen.

Auf eine Erläuterung der zeitlichen Diskretisierung mit Finiten Differenzen wird in diesem Bericht verzichtet, da nur stationäre Strömungsprobleme Gegenstand der vorliegenden Untersuchungen waren. Nähere Erläuterungen finden sich zum Beispiel bei KING (1982) oder FELDHAUS (1993).

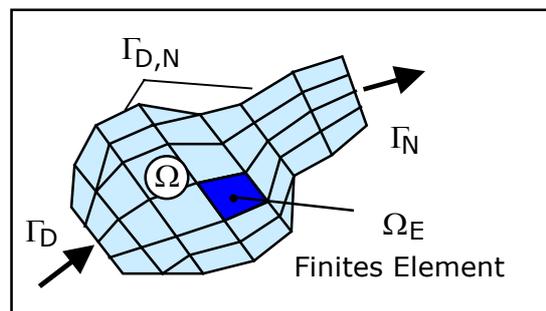


Abb. 3.1: Diskretisierung des Lösungsraumes  $\Omega$  und des Randes  $\Gamma$  in Finite Elemente

Die Grundzüge der hier verwendeten Methode der Finiten Elemente soll im folgenden an einer allgemeinen Transportgleichung für eine skalare Größe  $\varphi$  aufgezeigt werden (Gl. 3.1). Hinsichtlich weitergehender Ausführungen zu diesem numerischen Verfahren sei auf die umfangreiche Standardliteratur verwiesen (BECKER/CAREY/ODEN 1981; ZIENKIEWICZ, 1984; LAPIDUS/PINDER, 1982).

$$U_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( E_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + f_\varphi = 0 \quad (3.1)$$

Die Differentialgleichung (Gl. 3.1) muß im gesamten Lösungsraum  $\Omega$  erfüllt sein und auf dem Rand  $\Gamma = \Gamma_D \leftrightarrow \Gamma_N$  vorgegebenen Randbedingungen genügen (Abb. 3.1). Zu unterscheiden ist zwischen *Dirichlet'schen* Randbedingungen (auch we-

sentliche RB) auf  $\Gamma_D$  und *Neumann* Randbedingungen (auch natürliche RB) auf  $\Gamma_N$ . Auf  $\Gamma_D$  nimmt die skalare Größe mit  $\varphi = \varphi_0$  einen festen Wert an; es wird gefordert, daß diese Bedingung bereits durch die Approximationsfunktionen erfüllt wird. Auf  $\Gamma_N$  wird die Änderung von  $\varphi$  in Randnormalenrichtung  $n_i$  durch den Fluß  $q_0$  festgelegt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} n_i = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = q_0 \quad (3.2)$$

Wird nun die unbekannte Funktion  $\varphi$  durch einen Näherungsausdruck über "r" Stützstellen ( $i = 1, \dots, r$ ):

$$\varphi \approx \tilde{\varphi} = N_i \phi_i \quad (3.3)$$

ersetzt, so kann der resultierende Fehler nach der *Methode der gewichteten Residuen* über eine Integraldarstellung mit "r" voneinander unabhängigen Wichtungsfunktionen  $W_i$  minimiert werden:

$$\int_{\Omega} W_i \cdot \left[ U_k \frac{\partial (N_j \phi_j)}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( E_k \frac{\partial (N_j \phi_j)}{\partial x_k} \right) + f_{\varphi} \right] d\Omega = 0 \quad (3.4)$$

Nach dem hier angewendeten *Verfahren von Galerkin* werden die Wichtungsfunktionen gleich den Ansatzfunktionen  $W_i = N_i$  gesetzt. Gleichung 3.4 stellt ein geschlossenes System linear unabhängiger Gleichungen für die "r" unbekannt GröÙen  $\phi_i$  dar.

Die Ansatzfunktionen  $N_i$  werden bereichsweise definiert. Dadurch läÙt sich die Integration über den gesamten Lösungsraum sehr einfach in eine Summe von Teilintegrationen über kleinere Abschnitte, den *Finiten Elementen*, aufspalten:

$$\sum_e \int_{\Omega_e} N_i \cdot \left[ U_k \frac{\partial (N_j \phi_j)}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( E_k \frac{\partial (N_j \phi_j)}{\partial x_k} \right) + f_{\varphi} \right] d\Omega_e = 0 \quad (3.5)$$

Die zur Anwendung gelangten linearen und quadratischen Ansatzfunktionen mit  $C_0$ -Stetigkeit sind für die gebräuchlichen ein-, zwei- und dreidimensionalen Elementtypen im Anhang aufgeführt. Die  $C_0$ -Stetigkeit ist ein Konvergenzkriterium, daß die Stetigkeit der Unbekannten (hier:  $\phi$ ) zwischen den Elementen gewährleistet. Hingegen ist die erste Ableitung an den Elementgrenzen nicht stetig. Die Klasse  $C_0$ -stetiger Ansatzfunktionen ist brauchbar für alle Probleme in denen maximal Ableitungen 1. Ordnung auftreten. Aus diesem Grund muß der diffusive Transportterm wegen seiner zweiten Ableitungen durch eine partielle Integration (*Green-sches Divergenztheorem*) reduziert werden:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} N_i \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} \left( E_k \frac{\partial (N_j \phi_j)}{\partial x_k} \right) \right] d\Omega &= \int_{\Gamma} N_i \cdot \left( E_k \frac{\partial (N_j \phi_j)}{\partial x_k} \right) \cdot n_k d\Gamma \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \left( E_k \frac{\partial (N_j \phi_j)}{\partial x_k} \right) d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Unter der Voraussetzung, daß auf allen Rändern mit einer Dirichlet'schen Randbedingung keine Gleichungen für die Unbekannten  $\phi_i$  zu lösen sind, läßt sich das Randintegral auf  $\Gamma_N$  beschränken. Mit den auf  $\Gamma_N$  spezifizierten Randbedingungen (Gl. 3.2) lautet die Differentialgleichung (3.1) in Finite-Elemente-Formulierung:

$$\begin{aligned}
 R_\phi &= \int_{\Omega} N_i \cdot \left[ U_k \frac{\partial (N_j \phi_j)}{\partial x_k} \right] d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \left( E_k \frac{\partial (N_j \phi_j)}{\partial x_k} \right) d\Omega \\
 &- \int_{\Gamma_N} N_i \cdot (E_n \cdot q_0) d\Gamma_N + \int_{\Omega} N_i f_\phi d\Omega = 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

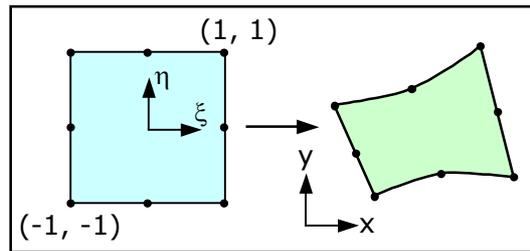


Abb. 3.2: Elementtransformation

Die im Anhang gegebenen Ansatzfunktionen sind für sogenannte Einheitselemente definiert, wodurch sie sich mit standardisierten Rechenoperationen aufstellen lassen. Die zur Diskretisierung des Lösungsraums  $\Omega$  verwendeten Elemente müssen daher über eine Transformation auf die entsprechenden Einheitselemente zurückgeführt werden (Abb. 3.2). Zweckmäßig ist hierzu die Verwendung der gleichen Ansatzfunktionen. Die global definierten Koordinaten  $x_i$  lassen sich damit in lokalen Einheitskoordinaten  $\xi_j$  ausdrücken. Beispielsweise gilt für die Koordinate  $x_i$ :

$$x_i(\xi, \eta, \zeta) = N_k(\xi, \eta, \zeta) \cdot x_{i,k} \tag{3.8}$$

Hierin ist  $x_{i,k}$  die Koordinate  $x_i$  des Elementknotens  $k$ .

Mit dem totalen Differential der Ansatzfunktion  $N$ :

$$\frac{\partial N}{\partial \xi_i} = \frac{\partial N}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} = J_{ij} \cdot \frac{\partial N}{\partial x_j} \quad (3.9)$$

ist der Zusammenhang zwischen den ersten Ableitungen in globalen und lokalen Koordinaten über die Jacobimatrix  $J_{ij}$  hergestellt. Für diese gilt mit Gleichung 3.8:

$$J_{ij} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} = \frac{\partial N_k}{\partial \xi_i} \cdot x_{j,k} \quad (3.10)$$

Mit der Inversen der Jacobimatrix lassen sich aus Gleichung 3.9 die ersten Ableitungen der Ansatzfunktionen in globalen Koordinaten ermitteln und in die Integralgleichung 3.7 einsetzen. Desweiteren ist eine Transformation des Integrationsbereiches notwendig. Für ein Gebietsintegral gilt mit der Determinanten der Jacobimatrix  $\det[J_{ij}]$ :

$$\int d\Omega = \iiint \det[J_{ij}] d\xi d\eta d\zeta \quad (3.11)$$

Für ein- und zweidimensionale Randintegrale ist die Transformation über den Betrag eines Vektors definiert:

$$\int d\Gamma = \int \left| \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \right\} \right| d\xi \quad (3.12)$$

$$\int d\Gamma = \iint \left| \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \right\} \times \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial \eta} \right\} \right| d\xi d\eta \quad (3.13)$$

Die Integration über dem Einheitselement erfolgt numerisch mit den ebenfalls im Anhang gegebenen *Gauss'schen Integrationsformeln*.

## 3.2 Dreidimensionales Strömungsmodell

Die Berechnung dreidimensionaler Strömungsvorgänge basiert auf der in Kapitel 2.2 beschriebenen Vereinfachung der Reynoldsgleichungen; die Vernachlässigung des vertikalen Impulses führt auf eine Gleichung für den hydrostatischen Druck, der nun eine Funktion der Wasserspiegellage  $S$  ist und als unbekannte Knotenvariable neben dem Fließgeschwindigkeitsvektor auftritt. Der Wasserspiegel ist zudem eine geometrische Größe, mit der die vertikale Ausdehnung des Finite-Elemente-Netzes definiert ist. Sie ist somit implizit im Integrationsprozeß enthalten. Darüberhinaus müssen Transportgleichungen für die Turbulenzparameter  $k$  und  $\varepsilon$  gelöst werden.

### 3.2.1 Transformation der freien Oberfläche

Ziel einer erfolgversprechenden Lösung der Reynoldsgleichungen für Strömungen mit freier Oberfläche ist es, über eine geometrische Transformation der Differentialgleichungen die variable Wasserspiegellage aus der Geometrie zu eliminieren. Ein derartiges Vorgehen wurde von KING (1982) vorgestellt. Den gleichen Ansatz verwendet auch AMMER (1993). Die Transformation führt auf relativ einfache Ausdrücke, da sie auf einem horizontal ausgerichteten Netz mit Einheitshöhe basiert (Abb. 3.3).

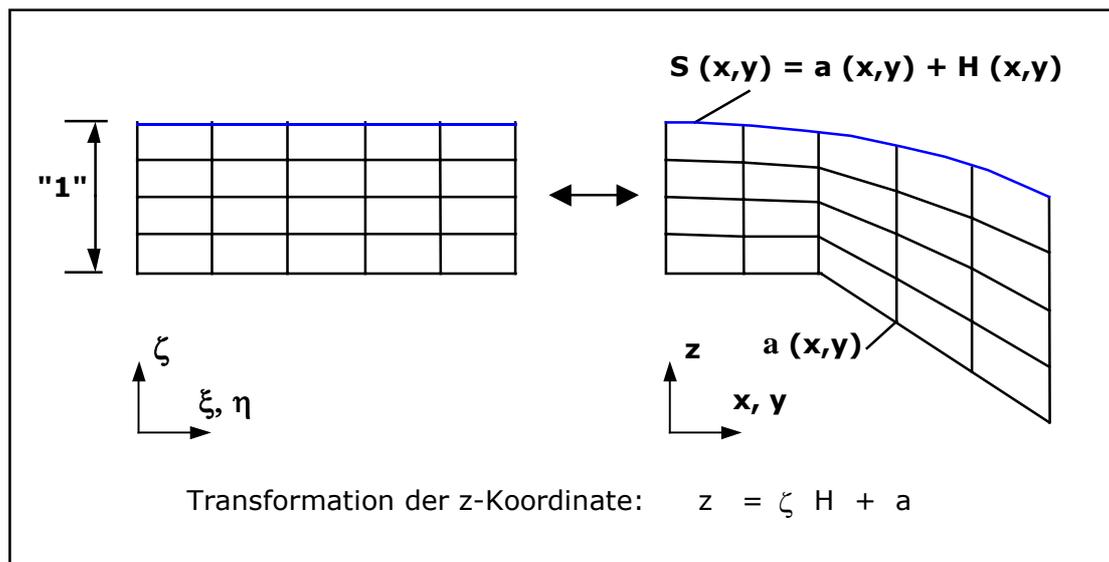


Abb. 3.3: Einheitstransformation nach KING (1982)

Aufgrund der Transformation der Sohle auf eine horizontale Fläche entstehen bei plötzlichen Änderungen der Sohlneigung jedoch Diskontinuitäten in der Richtung der berechneten Fließgeschwindigkeit. In Folge überarbeitete KING (1984) seine Transformationsvorschrift, so daß die Sohlgeometrie unverändert erhalten bleibt (Abb. 3.4).

Die Modellierung vertikaler Sohlabstürze ist auch mit dem verbesserten Ansatz von KING (1984) nicht möglich, da Sprünge in der Sohlgeometrie der Eindeutigkeit der Transformation widersprechen. Die gewünschte Modellierung der Strömung in dem experimentell untersuchten Mäandermodell (vgl. Kap. 4.1) stellt jedoch genau diese Anforderung. Die Transformation wurde zu diesem Zweck neu formuliert. Sie erstreckt sich nicht über die gesamte Fließtiefe, sondern bleibt auf einen Bereich zwischen der Schicht  $b$  und  $t$  beschränkt (Abb. 3.5). Außerdem wurde die Restriktion einer horizontalen Netzoberfläche durch einen variablen Ansatz ersetzt.

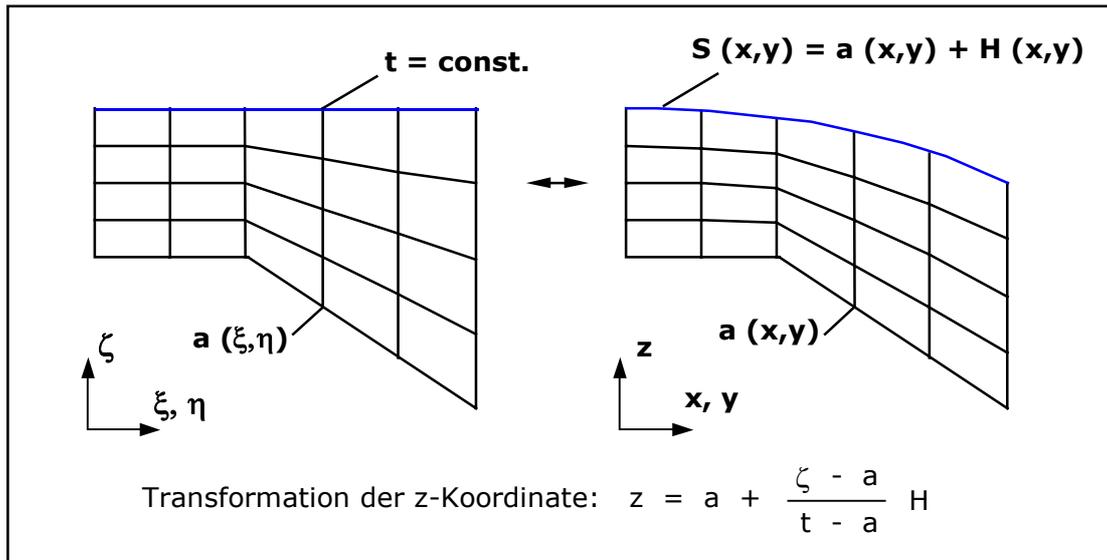


Abb. 3.4: Revidierte Transformation nach KING (1984)

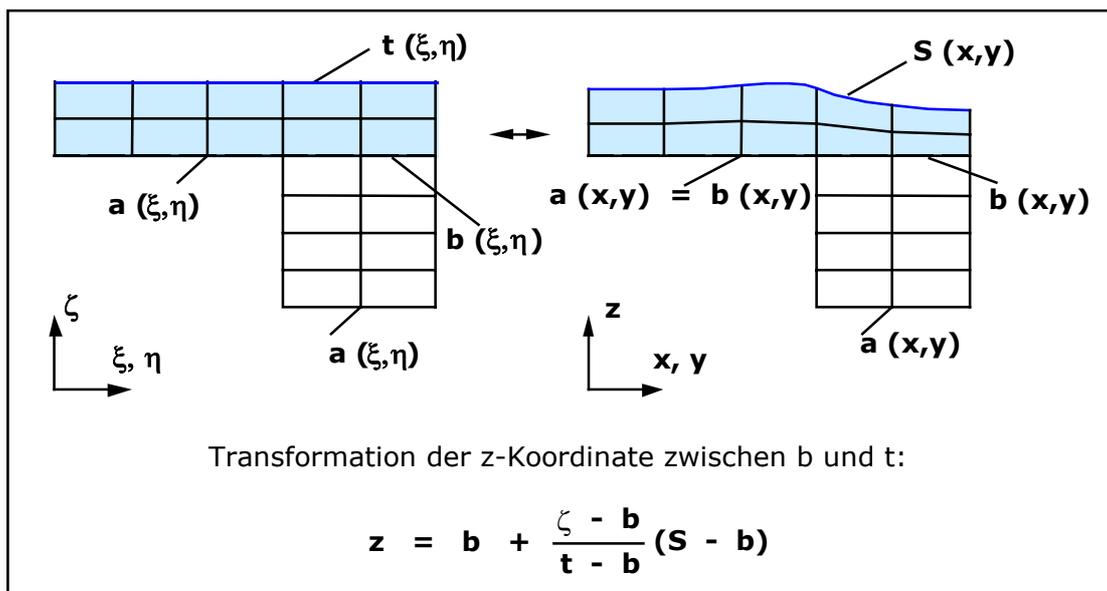


Abb. 3.5: Modifizierte Transformationsvorschrift

Durch die Transformation bleibt die Fließgeschwindigkeit an einem Knoten unberührt; sie hat den gleichen Wert in transformierten und nicht-transformierten Koordinaten. Dies gilt jedoch nicht für die Gradienten und den Integrationsbereich. Für den Gradienten ergibt sich aus dem totalen Differential<sup>5</sup>:

<sup>5</sup> Man beachte:  $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij}$  für:  $i = 1, 2$  und  $j = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial U_j}{\partial \xi_j} = \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} = \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi_j} \quad (j = 1, 2) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial U_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (3.15)$$

Die Ableitung der z-Koordinate nach den  $\xi_j$  ergibt sich nach einigen Umformungen aus der Transformationsvorschrift in Abb. 3.5:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi_i} = \frac{\partial b}{\partial \xi_i} \cdot (\beta_1 - 1) \cdot (\beta_2 - 1) + \beta_1 \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial \xi_i} - \beta_2 \frac{\partial t}{\partial \xi_i} \right) \quad (i = 1, 2) \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \beta_2 \quad (3.17)$$

$$\beta_1 = \frac{\zeta - b}{t - b} \quad (3.18)$$

$$\beta_2 = \frac{S - b}{t - b} \quad (3.19)$$

Der Integrationsbereich wird entsprechend Gleichung 3.17 transformiert:

$$d\Omega = dx \, dy \, dz = \beta_2 \cdot d\xi \, d\eta \, d\zeta \quad (3.20)$$

### 3.2.2 Formulierung der FE-Gleichungen

In der FE-Formulierung wird die Fließgeschwindigkeit mit quadratischen und der Wasserspiegel mit linearen Ansatzfunktionen approximiert. Für die beiden Turbulenzparameter  $k$  und  $\varepsilon$  erfolgt ein quadratischer Ansatz.

#### Tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung

Die tiefengemittelte Kontinuitätsbedingung (Gl. 2.9) ist die Gleichung für den unbekanntem Wasserspiegel  $S$  und nur von den beiden horizontalen Raumrichtungen  $x$  und  $y$  abhängig. In der FE-Darstellung erfolgt daher eine Integralformulierung über eine horizontale Projektion  $A$  des FE-Netzes. Das Integral in vertikaler Richtung (linke Seite von Gl. 2.9) kann in Folge mit dem horizontalen Integral zusammengefaßt werden (vgl. KING, 1988). Hinsichtlich der oben definierten Transformationsvorschriften (Abb. 3.5) muß das entstehende Volumenintegral in einen Bereich unterhalb und oberhalb der Transformationsgrenze  $b$  aufgespalten werden ( $V_U$  und  $V_O$ ). Mit den Gleichungen 3.16 bis 3.20 ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
R_C &= \int_{V_o} M_i \cdot \left[ \beta_2 \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right] dV_o \\
&+ \int_{V_u} M_i \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) dV_u \\
&+ \int_A M_{h,i} \cdot \left( U_S \frac{\partial S}{\partial \xi} + V_S \frac{\partial S}{\partial \eta} - U_a \frac{\partial a}{\partial \xi} - V_a \frac{\partial a}{\partial \eta} \right) dA
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Hierin sind die  $M_i$  lineare Formfunktionen für räumliche Elemente und  $M_{h,i}$  für flächige horizontale Elemente. Die Anzahl der Gleichungen und damit der unbekanntenen  $S_k$  entspricht der Anzahl der Eckknoten an der Oberfläche des FE-Netzes.

Die Formulierung der tiefengemittelten Kontinuitätsgleichung hat eine Restriktion in der Generierung des FE-Netzes zur Folge: Alle Knoten müssen auf vertikalen Linien liegen, da die Beiträge aus dem Volumenintegral in vertikaler Richtung aufsummiert werden.

### Reynoldsgleichungen

Die beiden horizontalen Fließgeschwindigkeiten  $U$  und  $V$  werden mit quadratischen Formfunktionen  $N_j$  aus den beiden horizontalen Impulsgleichungen (Gl. 2.4) berechnet, wobei der Druckterm mit Gleichung 2.8 ersetzt wurde. Die beiden Gleichungen wurden mit der Höhe des FE-Netzes ( $t - b$ ) multipliziert. Das *Green'sche Divergenztheorem* wurde auf den Spannungstensor und den Druckterm angewendet. Zwar ist eine Anwendung auf den Druckterm nicht erforderlich, sie ermöglicht aber die Vorgabe eines Wasserspiegels nach Art einer natürlichen Randbedingung. Dadurch kommt die Kontinuitätsgleichung (Gl. 3.21) ohne jegliche Randwertvorgabe aus. Die Integralgleichung wurde wiederum in einen Bereich unterhalb und oberhalb der Transformationsgrenze  $b$  aufgespalten ( $\Omega_u$  und  $\Omega_o$ ). Die Gleichung ist in Anhang B.1.2 notiert.

### Kontinuitätsgleichung für die vertikale Fließgeschwindigkeit

Einem Ansatz von KING (1984) folgend wird die Kontinuitätsgleichung durch eine partielle Differentiation nach der vertikalen Raumrichtung  $z$  in eine Randwertgleichung für die Vertikalkomponente der Fließgeschwindigkeit  $W$  überführt. Die daraus resultierenden zweiten Ableitungen werden mit dem *Green'schen Divergenztheorem* reduziert:

$$R_W = \int_{\Gamma} N_i \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \cdot n_z d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_k} \cdot n_z d\Omega \tag{3.22}$$

Eine Transformation dieser Gleichung ist nicht erforderlich, da ihre Lösung entkoppelt von der Lösung der tiefengemittelten Kontinuitätsgleichung erfolgt. Die Transformation läßt sich in diesem Fall einfacher auf das FE-Netz anwenden.

Die vertikale Fließgeschwindigkeit  $W$  ist an der freien Oberfläche und der Gerinnesohle bereits durch die kinematische Randbedingung festgelegt. Sie wird daher als Dirichlet'sche Randbedingung berücksichtigt. An allen anderen seitlichen, per Restriktion vertikalen Randflächen ist die Vertikalkomponente des Normalenvektors  $n_z$  identisch Null. Das Randintegral in Gleichung 3.22 entfällt daher vollständig (s. auch Anhang B.1.3).

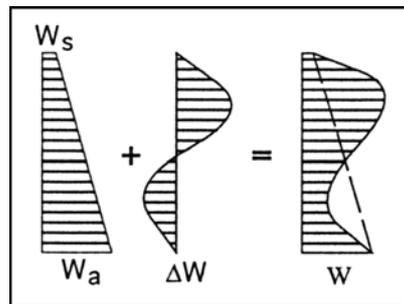


Abb. 3.6: Überlagerung der vertikalen Fließgeschwindigkeit aus kinematischer Randbedingung und Gl. 3.22

Durch die Formulierung als Randwertgleichung stellt die berechnete vertikale Fließgeschwindigkeit lediglich die Differenz zu einer linearen Verteilung aus den kinematischen Randbedingungen dar (s. Abb. 3.6).

Diese etwas umständliche Lösung der Kontinuitätsgleichung hat den Vorteil, daß beide kinematische Randbedingungen an Sohle und freier Oberfläche berücksichtigt werden können. Die originale Kontinuitätsgleichung (Gl. 2.5) führt in diesem Fall zu singulären Matrizen; sie könnte nur mit einer Randbedingung (z.B. an der Sohle) gelöst werden, was zu Stabilitätsproblemen im iterativen Lösungsprozeß führt.

### k- $\epsilon$ -Gleichungen

Die FE-Formulierung der k- $\epsilon$ -Gleichungen ist Anhang B.1.4 zu entnehmen. Die zweiten Ableitungen im diffusiven Transportterm wurden wiederum mit dem *Green'schen Divergenztheorem* reduziert.

### 3.2.3 Randbedingungen

Erst mit der Vorgabe von Randbedingungen ist eine eindeutige Lösung der oben beschriebenen Differentialgleichungen gegeben. Zu unterscheiden ist zwischen durchströmten und nicht durchströmten Rändern. Durchströmte Ränder sind der

Ein- und Auslauftrand; nicht durchströmte Ränder sind feste Begrenzungsflächen sowie die freie Oberfläche.

Auf nicht durchströmten Rändern verschwindet die Komponente der Fließgeschwindigkeit in Randnormalenrichtung:

$$U_i \cdot n_i = U_n = 0 \quad (3.23)$$

Damit entfällt ebenfalls die zugehörige Impulsbilanzgleichung. Da diese Richtung im allgemeinen nicht mit den Koordinatenachsen zusammenfällt (Abb. 3.7), wird für Randknoten eine Rotation der Reynoldsgleichungen auf die Normal- und Tangentialrichtung erforderlich (ENGELMAN et al., 1982).

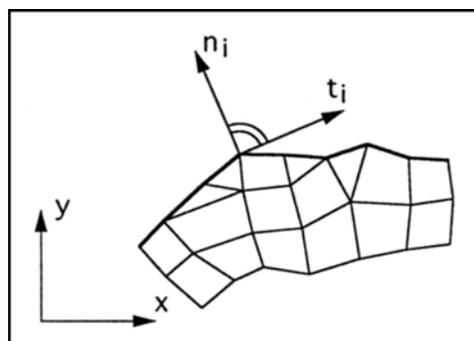


Abb. 3.7: Definition eines gedrehten Randkoordinatensystems

Bei dem vorliegenden Strömungsmodell wurde die Impulsbilanz in vertikaler Richtung durch einen hydrostatischen Druckansatz ersetzt. Daher entfällt die Rotation für Randknoten an der Gerinnesohle und an der freien Oberfläche. Hier wird Gleichung 3.23 über die kinematische Randbedingung in der tiefengemittelten Kontinuitätsgleichung berücksichtigt.

Die Rotation der Reynoldsgleichungen beschränkt sich somit wie bei dem zweidimensional tiefengemittelten Modell auf die zwei Horizontalkomponenten der Fließgeschwindigkeit. Mit der aus dem Tangentialvektor  $t_j$  und Normalenvektor  $n_j$  des Randes gebildeten Rotationsmatrix:

$$[\alpha_{ij}] = \begin{bmatrix} t_1 & n_1 \\ t_2 & n_2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

ist die Rotation des Geschwindigkeitsvektors  $U_j$  von lokalen Randkoordinaten  $(t, n)$  auf die globalen Koordinaten  $(x, y)$  definiert mit:

$$\{U_i(x, y)\} = [\alpha_{ij}] \cdot \{U_j(t, n)\} \quad (3.25)$$

Daraus folgt für die Reynoldsgleichungen (hier in symbolischer Matrizenschreibweise):

$$\left( [\alpha_{ik}]^T \cdot [A_{kl}(x, y)] \cdot [\alpha_{lj}] \right) \cdot \{U_j(t, n)\} = [\alpha_{ik}]^T \cdot \{b_j(x, y)\} \quad (3.26)$$

Zunächst werden die Reynoldsgleichungen in globalen Koordinaten formuliert. Nach der Rotation (Gl. 3.26) kann dann die Gleichung in Normalenrichtung gestrichen werden. Die Lösung des Gleichungssystems ergibt schließlich die Fließgeschwindigkeit in Tangentialrichtung, die dann noch entsprechend Gleichung 3.25 in das globale Koordinatensystem überführt werden muß.

Die Ermittlung der Randnormalenrichtung erfolgt unter Gewährleistung einer globalen Kontinuität. Wegen des nicht stetig differenzierbaren Randes wird gefordert, daß der Volumenstrom der das Strömungsgebiet durch eine Randseite verläßt über eine andere Randseite wieder zugeführt wird (Abb. 3.8). Leider erwiesen sich die von ENGELMAN et al. (1982) aus der Kontinuitätsbedingung abgeleiteten Gleichungen zur Ermittlung der Randnormalenrichtung nicht als allgemeingültig; sie versagen bei dreidimensionalen quadratischen Elementtypen. Alternativ wird hier ein geometrischer Ansatz verwendet, der zu identischen Ergebnissen für die Randnormalenrichtung führt.

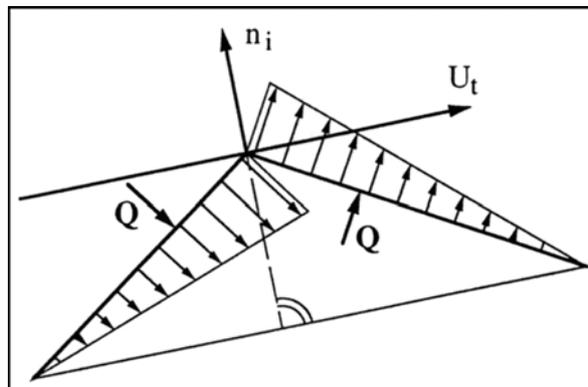


Abb. 3.8: Ermittlung der Randnormalenrichtung  $n_j$  zur Gewährleistung der globalen Kontinuität

Die Normalenrichtung an einem Randknoten ergibt sich aus dem mit der Seitenlänge  $L_r$  gewichteten Mittel der Normalen der angrenzenden Randseiten oder Randflächen. Unter Verwendung der im Anhang A definierten Ansatzfunktionen zur Formulierung der Koordinatentransformation (vgl. Gl. 3.10) gilt für eindimensionale Randelemente mit der Länge des Einheitselementes  $l_\xi = 2,0$ :

$$\{n_i\} = \sum_r \frac{1}{L_r} \cdot \sum_r \begin{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

$$L_r = \frac{1}{\ell_\xi} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} \quad (3.28)$$

Für zweidimensionale Randelemente gilt mit der Fläche des Einheitselementes  $a_{\xi\eta}$  :

$$\{n_i\} = \sum_r \frac{1}{A_r} \cdot \sum_r \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

$$A_r = \frac{1}{a_{\xi\eta}} \left| \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \right| \quad (3.30)$$

### Einlauftrand $\Gamma_E$

Auf dem Einlauftrand werden die horizontalen Fließgeschwindigkeiten  $U_i$  sowie die Turbulenzgrößen  $k$  und  $\varepsilon$  als Dirichlet'sche Randbedingung spezifiziert. Der Wasserspiegel  $S$  ergibt sich bei strömendem Zufluß erst während der Berechnung aus den Abströmverhältnissen und sollte daher frei bleiben. Darum wird die Fließgeschwindigkeit als mittlerer Zufluß

$$q_i = \int_a^S U_i \, dz \quad (3.31)$$

an einer vertikalen Linie für die zwei horizontalen Richtungen ( $i = 1, 2$ ) spezifiziert; die vertikale Form des Einlaufprofils wird über ein Potenzgesetz festgelegt (Abb. 3.9). Für einen Knoten in der Höhe  $z'$  über der Gerinnesohle gilt mit dem Exponenten  $p$  (z.B.: 1/7-Potenzgesetz,  $p = 1/7$ ) und dem Verhältnis der Fließgeschwindigkeit am sohnächsten Punkt (Wandabstand  $x_n$ ) zur Fließgeschwindigkeit an der Oberfläche  $a = U_{\min} / U_{\max}$ :

$$U_i = \frac{q_i \cdot (p+1)}{H + x_n \cdot (1-a)} \cdot \left( \frac{z' + x_n}{H + x_n} \right)^p \quad (3.32)$$

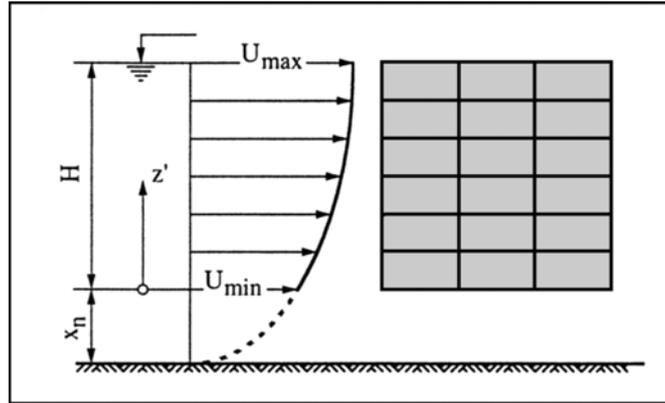


Abb. 3.9: Geschwindigkeitsprofil nach dem Potenzgesetz

Eine der beiden horizontalen Impulsgleichungen wird gestrichen, die andere wird für alle Knoten des Einlaufendes durch Gleichung 3.32 ersetzt.

Die Einlaufendbedingungen für  $k$  und  $\varepsilon$  stehen in der Regel nicht aus experimentellen Daten zur Verfügung. Ihre Vorgabe erfolgt daher mit der Gesetzmäßigkeit der zweidimensionalen Kanalströmung aus Kapitel 2.5.2.1 (Gl. 2.42, 2.44 oder Gl. 2.45, 2.46).

### Auslaufend $\Gamma_A$

Am Auslaufend muß bei strömendem Abfluß nur der Wasserspiegel  $S$  als Randbedingung spezifiziert werden. Mit der Forderung, daß für diesen Rand annähernd gleichförmige Strömungsverhältnisse gelten, werden die Gradienten in Randnormalenrichtung zu Null gesetzt (vgl. Anhang B):

$$\frac{\partial U_i}{\partial n} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0 \quad (3.34)$$

Der spezifizierte Wasserspiegel wird nicht durch die Streichung der zugehörigen Gleichung (tiefengemittelte Kontinuitätsbedingung, Gl. 3.21) eingehalten, sondern wird nach Art einer natürlichen Randbedingung in den Randintegralen der Reynoldsgleichungen berücksichtigt.

### feste Begrenzung $\Gamma_w$

An festen Begrenzungen wird das FE-Netz nicht direkt bis an die Wand herangeführt, sondern endet in einem endlichen Wandabstand  $x_n$ . Die in Wandnähe auftretenden großen Gradienten brauchen dann im Strömungsmodell nicht durch eine entsprechende Netzfeinheit aufgelöst werden. Für den im Abstand  $x_n$  angeordneten Netzknoten wird die Gültigkeit des logarithmischen Wandgesetzes vorausgesetzt

(vgl. Kap. 2.4.1.1). Die resultierende Fließgeschwindigkeit an diesem Knoten liegt mit der bekannten Sohlschubspannungsgeschwindigkeit fest und wird als natürliche Randbedingung mit der Gesetzmäßigkeit nach Gl. 2.12 in den Randintegralen der Reynoldsgleichungen berücksichtigt:

$$v \cdot \frac{\partial U_k}{\partial n} - n_j \cdot \overline{u_k u_j} = U_\tau^2 \quad (3.35)$$

Die turbulenten Größen  $k$  und  $\varepsilon$  werden als Dirichlet'sche Randbedingung spezifiziert. Für sie gilt (z.B. RODI, 1978):

$$k = \frac{U_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad (3.36)$$

$$\varepsilon = \frac{U_\tau^3}{\kappa \cdot X_n} \quad (3.37)$$

### freie Oberfläche $\Gamma_s$

Die freie Oberfläche wird, sofern Windschubspannungen nicht berücksichtigt werden brauchen, als Symmetrieebene betrachtet. Für die Gradienten gelten dann wie beim Auslaufrand die Gleichungen 3.33 und 3.34. Bei Berücksichtigung von Windschubspannungen gehen diese als natürliche Randbedingung entsprechend Gleichung 3.35 in das Strömungsmodell ein.

Das turbulente Längenmaß (vgl. z.B. Gl. 2.59) wird an der freien Oberfläche reduziert. Es ist daher angebracht die erhöhte Dissipation  $\varepsilon$  über eine algebraische Beziehung an die turbulente kinetische Energie zu knüpfen (CELIK / RODI, 1984):

$$\varepsilon = \frac{k^{3/2}}{0,18 \cdot H} \quad (3.38)$$

## 3.3 Zweidimensionales Strömungsmodell

Das zweidimensionale Strömungsmodell beruht auf den Flachwassergleichungen (Gl. 2.10 und 2.11) und gegebenenfalls auf den tiefengemittelten  $k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen (Gl. 2.63 und 2.64). Neben dem hydrostatischen Druckansatz, der auch bei den dreidimensionalen Gleichungen verwendet wurde, werden vertikale Profilungleichförmigkeiten (dispersive Terme) vernachlässigt.

### 3.3.1 Formulierung der FE-Gleichungen

Die Flachwassergleichungen stellen ein Gleichungssystem für die tiefengemittelten horizontalen Fließgeschwindigkeiten  $U_i$  ( $i = 1, 2$ ) und den Wasserspiegel  $S$  dar. Letzterer ist im Gegensatz zur dreidimensionalen Modellierung keine geometrische Größe, sondern lediglich ein unbekannter Knotenparameter und kann damit direkt modelliert werden. Die vollständige FE-Formulierung der Flachwassergleichungen einschließlich der  $k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen ist Anhang B.2 zu entnehmen.

### 3.3.2 Randbedingungen

Zu den Randbedingungen gilt im wesentlichen das bereits in Kapitel 3.2.3 gesagte. Auf dem Einlauftrand wird nun direkt der tiefengemittelte Zufluß benötigt. Die zugehörige Impulsgleichung wird durch die Beziehung  $q_i = H U_i$  ersetzt. Die turbulenten Größen  $k$  und  $\varepsilon$  werden mit den algebraischen Gleichungen 2.53 und 2.54 als Dirichlet'sche Randbedingung spezifiziert. Der Auslauftrand wird identisch zur dreidimensionalen Modellierung behandelt. Daneben treten nur noch seitliche Ränder im Strömungsgebiet auf. Hier kann analog zu den Ausführungen in Kapitel 3.2.3 der viskose/turbulente Term in den Randintegralen durch die Wandschubspannungsgeschwindigkeit  $U_\tau$  ersetzt werden. Da bei natürlichen Strömungen im seitlichen Bereich die Fließtiefen sehr gering werden, ist es jedoch ebenso zulässig  $U_\tau$  zu vernachlässigen, und den Rand als spannungsfrei anzusehen. Bei dieser sogenannten "slip-flow"-Bedingung entfallen die viskosen/turbulenten Randintegrale vollständig.

## 3.4 Lösungsstrategie

### 3.4.1 Linearisierung und Gleichungslöser

Sowohl die Strömungs- als auch die  $k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen enthalten nicht-lineare Terme. Eine Lösung der jeweiligen diskreten Gleichungssysteme kann daher nicht mehr direkt, sondern nur noch mit iterativen Lösungsverfahren erfolgen. Wegen seines quadratischen Konvergenzverhaltens wird hierzu das Iterationsverfahren nach *Newton-Raphson* eingesetzt. In allgemeiner Schreibweise lassen sich die nicht-linearen FE-Gleichungen in der Form

$$\Psi_i = A_{ij} \cdot \varphi_j - b_i = 0 \quad (3.39)$$

schreiben. Das Iterationsverfahren von *Newton-Raphson* verwendet nun eine abgebrochene Taylor-Reihenentwicklung zur Linearisierung dieser Gleichung. Man erhält für den  $n$ -ten Iterationsschritt ein Gleichungssystem für die Änderungen  $\Delta\varphi$ :

$$\left[ \frac{d\Psi_i}{d\varphi_j} \right]_n \cdot \{\Delta\varphi_j\}_n = \{\Psi_i\}_n \quad (3.40)$$

und damit die Verbesserung der Lösung zu:

$$\{\varphi_i\}_{n+1} = \{\varphi_i\}_n + \{\Delta\varphi_i\}_n \quad (3.41)$$

Dieses Verfahren setzt zum schnellen Erreichen einer Konvergenz häufig eine gute Startlösung voraus. Etwas stabiler verhält sich der gedämpfte *Newton-Raphson* (z.B. in ENGELN-MÜLLGES/REUTTER, 1990). Hierbei wird der berechnete Änderungsvektor  $\Delta\varphi_i$  aus der  $n$ -ten Iteration solange relaxiert, bis sich im folgenden Iterationsschritt ( $n+1$ ) ein konvergentes Verhalten abzeichnet. Zur Beurteilung der Konvergenz dient der Betrag des Änderungsvektors, der mit jedem Iterationsschritt kleiner werden soll.

Die Lösung der linearen Gleichungssysteme erfolgt mit dem von HOOD (1976) beschriebenen Gleichungslöser für Finite Elemente Probleme, der im wesentlichen auf dem Gauss-Algorithmus beruht und hinsichtlich Rechenzeit und Speicherbedarf äußerst effizient arbeitet.

Eine weitere Reduzierung des Rechenaufwandes läßt sich zumindest bei "gutmütig" konvergierenden Problemen mit einem modifizierten *Newton-Raphson* Algorithmus erreichen, bei dem die Matrix

$$\left[ \frac{d\Psi_i}{d\varphi_j} \right] \quad (3.42)$$

nicht mehr für jeden Iterationsschritt formuliert, sondern über mehrere Schritte unverändert beibehalten wird.

### 3.4.2 Berechnungsablauf

Im Berechnungsablauf hat sich die getrennte Lösung der  $k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen von den Strömungsgleichungen bewährt, da diese nur über die Wirbelviskosität miteinander gekoppelt sind. So erfolgt zunächst die Lösung der Strömungsgleichungen für die Fließgeschwindigkeiten und den Wasserspiegel unter Verwendung einer bereichsweise konstanten Wirbelviskosität. Im dreidimensionalen Fall wird zusätzlich die vertikale Fließgeschwindigkeit entkoppelt nach jedem Iterationsschritt berechnet. Nach vollständiger Konvergenz schließt sich die Berechnung der Wirbelviskosität und die Initialisierung der Turbulenzgrößen  $k$  und  $\varepsilon$  mit den algebraischen Ansätzen nach Kapitel 2.5.2 an. Danach kann die Strömung neu berechnet werden oder direkt eine Lösung der  $k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen erfolgen. Die Lösung der Strömungsgleichungen und der  $k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen erfolgt abwechselnd, bis zum Erreichen der vollständigen Konvergenz (vgl. Abb. 3.10).

Die vollständige Lösung der  $k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen bereitet in der FE-Modellierung problemspezifische Schwierigkeiten, die zum einen auf die starke Nichtlinearität dieser Gleichungen zurückzuführen sind, und zum anderen aus einer zu groben Startwertvorbesetzung mit den algebraischen Ansätzen aus Kapitel 2.5.2 resultieren. Diese Konvergenzprobleme ließen sich häufig durch das Auskoppeln der Wirbelviskosität  $\nu_t$  aus den  $k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen lösen. Hierzu wird  $\nu_t$  nicht direkt mit der Kolmogorov-Prandtl-Beziehung (Gl. 2.40) angesetzt, sondern zunächst mit seinem algebraischen Initialisierungswert konstant gehalten. Mit diesem Ansatz werden die Turbulenzgleichungen weitestgehend linearisiert. Die somit erhaltene verbesserte Startwertvorbesetzung für  $k$  und  $\varepsilon$ , reicht häufig aus ein stabiles Konvergenzverhalten der Turbulenzgleichungen zu erzielen. Andernfalls wird mit den linearisierten Gleichungen weitergerechnet, wobei die Wirbelviskosität mit der Kolmogorov-Prandtl-Beziehung nach jeder Transportberechnung für  $k$  und  $\varepsilon$  aktualisiert wird. Ein möglicher Berechnungsablauf ist grob in Abbildung 3.10 skizziert.

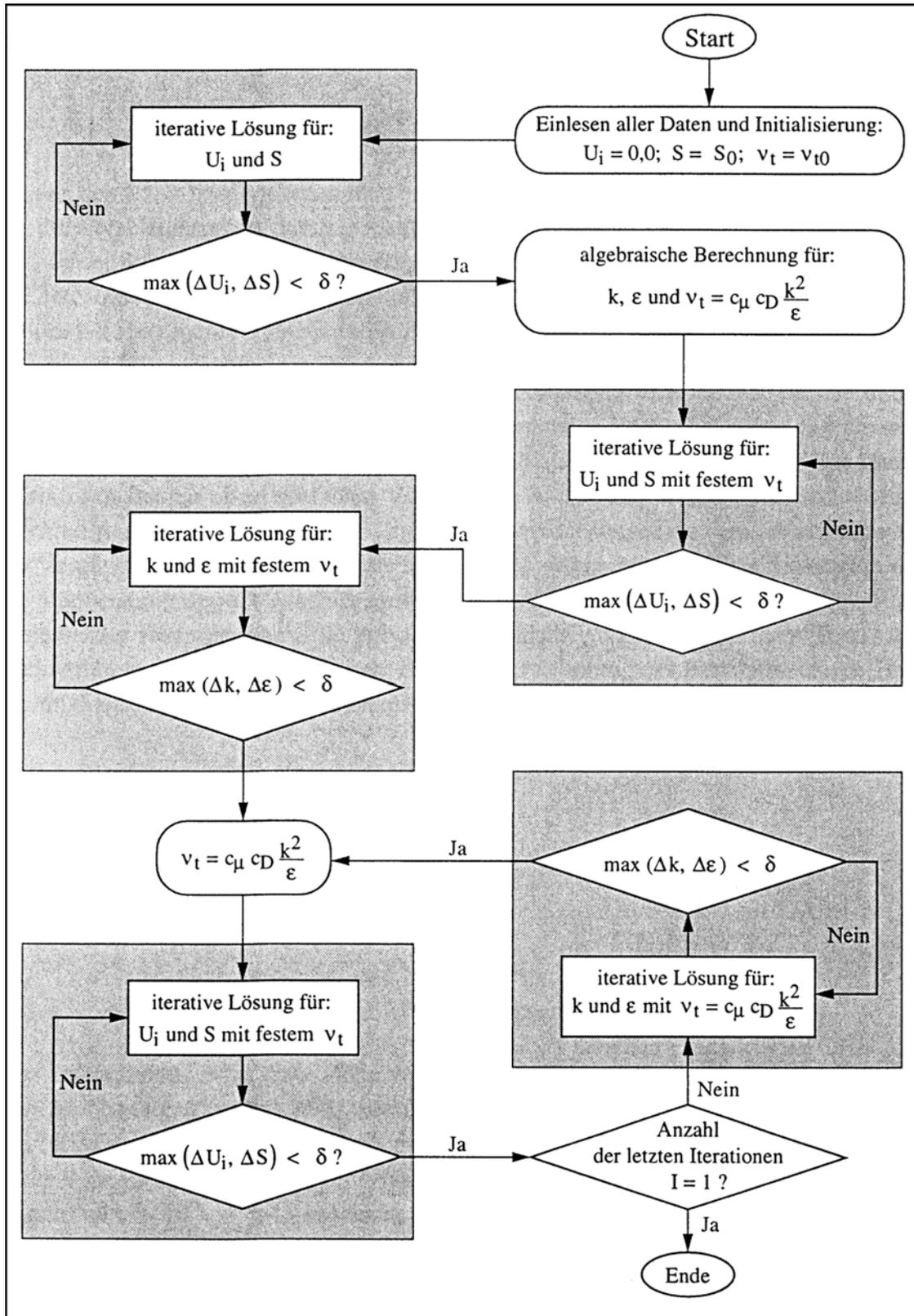


Abb. 3.10: Lösungsalgorithmus

## 4 Experimentelle Untersuchungen

Neben den zuvor beschriebenen mathematisch-numerischen Entwicklungsarbeiten wurde die Forschungsarbeit durch umfangreiche experimentelle Grundlagenuntersuchungen an der Strömung in einem mäandrierenden Gerinne mit überströmten Vorländern begleitet. Zusätzlich stand das physikalische Modell eines natürlichen Mäanders, der Wurm bei Herzogenrath im niederländischen Grenzgebiet, zur Verfügung.

Damit konnte auf umfangreiches Datenmaterial zurückgegriffen werden, um die Simulationsmodelle hinsichtlich der ihnen zugrundeliegenden Vereinfachungen und der verwendeten Turbulenzmodelle zu überprüfen. Erkenntnisse aus den experimentellen Untersuchungen fanden ohne zeitlichen Verzug ihre Umsetzung in den numerischen Entwicklungsarbeiten. So zeigten die Grundlagenuntersuchungen an dem Mäandermodell im Vergleich zu den Ergebnissen der zweidimensional tiefengemittelten Simulation unter Verwendung des  $k$ - $\epsilon$ -Modells große Diskrepanzen in der Fließgeschwindigkeit im Bereich des Hauptgerinnes, die auf die Vernachlässigung der dispersiven Terme zurückzuführen waren. In Folge wurde daher die Erweiterung des Simulationsmodells zu einem dreidimensionalen Berechnungsverfahren durchgeführt.

### 4.1 Mäandermodell

#### 4.1.1 Versuchsstand und Meßprogramm

Das Laborgerinne ist in einer Höhe von 2,00 m auf einer Stahlkonstruktion aufgebaut. Die Abmessungen des aus PVC gefertigten Gerinnes betragen ca. 15,00 m in der Länge, ca. 3,00 m in der Breite und 0,35 m in der Höhe (s. Abb. 4.1). Das Modell wird über zwei Pumpen aus einem 12,0 m<sup>3</sup> fassenden Rücklaufbecken mit einem maximalen Durchfluß von 60 + 70 m<sup>3</sup>/s beschickt. Die im Modellzulauf befindlichen Beruhigungselemente sollen gleichmäßige Zuströmbedingungen gewährleisten. Das Regulierschütz im Modellauslauf wurde inzwischen durch einen Behälter ersetzt, der am Grund über eine mit einem Schieber drosselbare Rohrleitung entleert wird. Hierdurch wird die durch das Schütz verursachte Wasserspiegelabsenkung im Auslaufbereich verhindert. Die Längsneigung des Modells läßt sich über Spindeln in einem Bereich von 0 bis 2 ‰ verstellen.

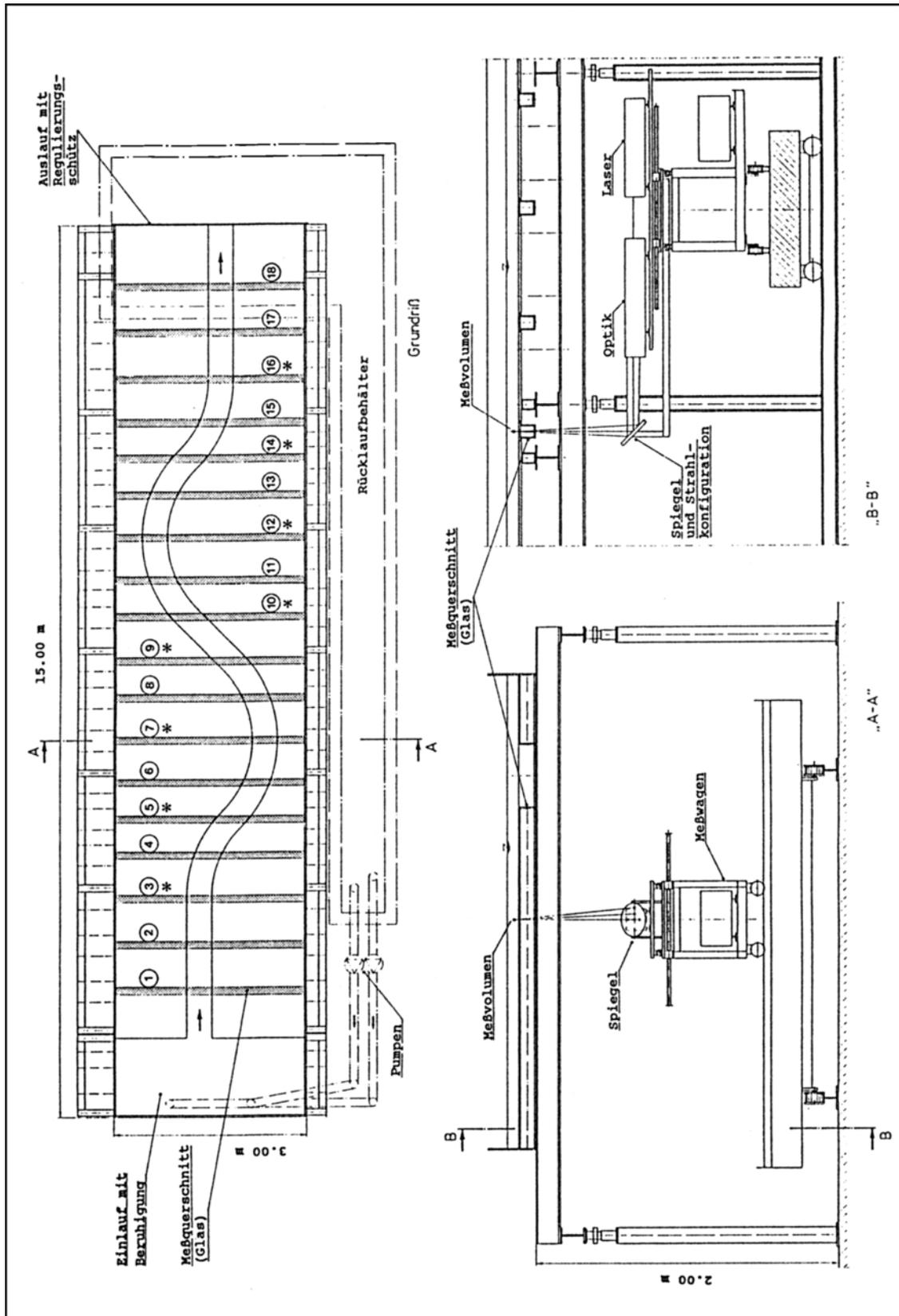


Abb. 4.1: Physikalisches Mäandermodell

Der Flußschlauch besteht aus einem 0,40 m breiten und 0,10 m tiefen Rechteckkanal, der sich in zwei halben Schleifen mit einem Krümmungsradius von 1,80 m durch das 3,00 m breite Gerinne zieht. Die angrenzenden Vorlandbereiche haben entsprechend eine Ausdehnung zwischen 0,40 m und 2,20 m. Die geometrischen Abmessungen sind in Abb. 4.2 gegeben. Das Foto in Abbildung 4.3 wurde mit Blickrichtung auf den Modellzulauf aufgenommen.

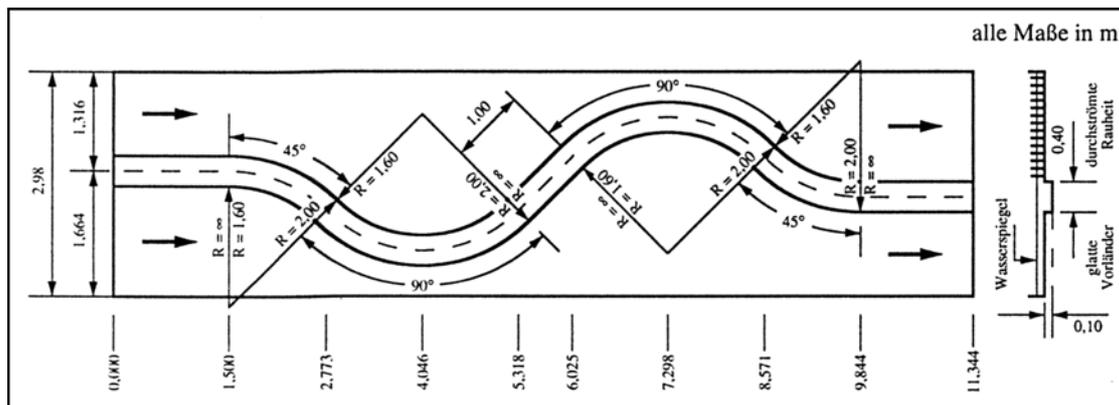


Abb. 4.2: Geometrische Abmessungen des Mänders

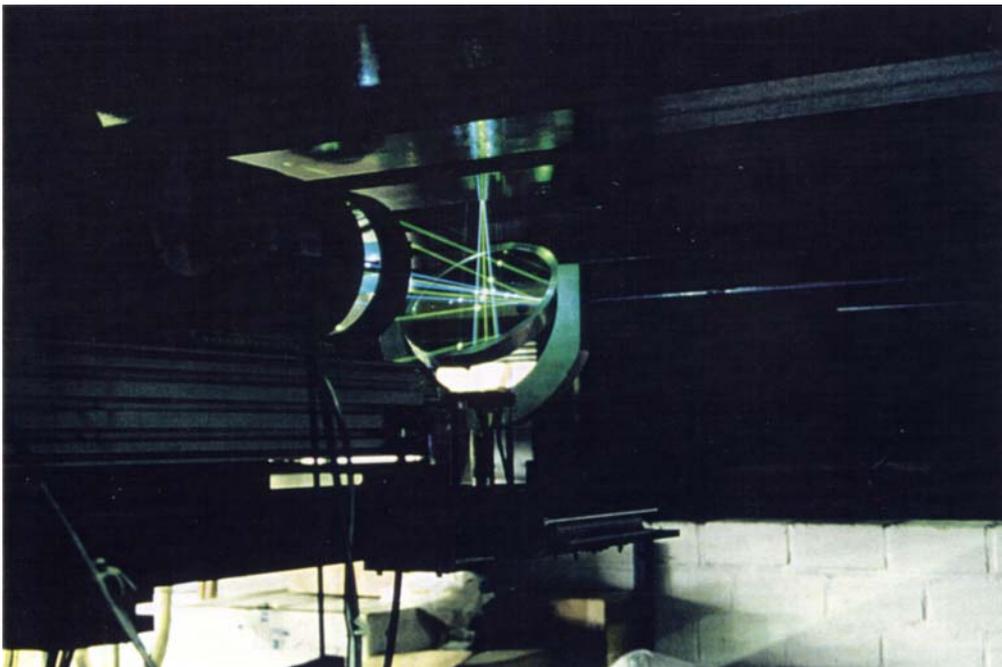
In der Gerinnesohle sind über die gesamte Länge 18 Meßquerschnitte aus Glas eingelassen. Die Strömungsmessungen blieben auf 8 signifikante Querschnitte beschränkt, die in Abbildung 4.1 mit einem Stern gekennzeichnet sind. Die Meßanlage, ein 3-Kanal-Laser-Doppler-Anemometer (LDA), befindet sich unter dem Modell. Die horizontal emittierten Laserstrahlen werden über einen Umlenkspiegel durch die Glasquerschnitte in die Strömung eingebracht (s. Abb. 4.4). Das LDA ist auf einem verfahrbaren Wagen montiert. Den Sockel dieses Wagens bildet ein massiver Betonblock, der auf Schienen in Modellängsrichtung bewegt werden kann. Während eines Meßvorgangs wird das Fundament über Spindeln von den Schienen abgehoben, um den Einfluß von Vibrationen durch die Pumpen zu minimieren. Die Meßanlage läßt sich auf dem Betonblock in lateraler und longitudinaler Richtung über eine Schrittmotorsteuerung verfahren. Die Strömungsmessung erfolgt unter der automatisierten Kontrolle eines Prozeßrechners im gesamtem Meßquerschnitt an vorgebenen Punkten eines Meßrasters. Die Meßwerterfassung und statistische Auswertung (s. Kap. 4.1.3) erfolgt zeitgleich auf dem Prozeßrechner.

Die Strömungsmessungen wurden unter einer Variation von Modellparametern durchgeführt. Sie erfolgten bei Fließtiefen zwischen 6 und 15 cm im Flußschlauch, bei einem Längsgefälle von 0,5 ‰ und 1,0 ‰. Die Vorländer wurden mit durchströmten Rauheiten (Bewuchselemente) versehen, die in unterschiedlichen Besetzungen angeordnet waren. Den Grundzustand (glatte Vorländer) bildete die Besetzung A00.

Abb. 4.3:  
Physikalisches Mäandermodell  
mit Blickrichtung auf den Mo-  
dellzulauf



Abb. 4.4:  
3-Kanal-Laser-Doppler-  
Anemometer; Blick auf  
den Umlenkspiegel





### 4.1.2 Meßtechnik und Datenerfassung

An die Meßtechnik zur Durchführung der Strömungsmessungen waren besondere Anforderungen zu stellen, da bereits die ersten Voruntersuchungen auf der Basis von Farbstoffeinleitungen auf ein äußerst komplexes dreidimensionales Fließverhalten mit ausgeprägten Sekundärströmungen hindeuteten. Außerdem sollte mit den experimentellen Daten die Eignung der unterschiedlichen Ansätze zur Turbulenzmodellierung untersucht werden. Die Meßwertaufnahme mußte also zum einen berührungsfrei sein, damit turbulente Strukturen unverfälscht aufgenommen werden konnten. Zum anderen sollte der räumliche Strömungsvektor vollständig und simultan erfaßt werden. Die simultane Erfassung aller drei Komponenten der Fließgeschwindigkeit ist erforderlich, um aus einer statistischen Mittelung der momentanen Einzelmessungen den vollständigen Reynoldsspannungstensor zu ermitteln. Diese Anforderungen werden nur von der 3-Kanal-Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) erfüllt.

Das Grundprinzip dieser Meßtechnik (z.B. DURST et al., 1981) beruht bei dem sogenannten LDA-Zweistrahilverfahren auf der Überlagerung zweier Laserstrahlen im Strömungsfeld. Eine Messung erfolgt genau dann, wenn ein Partikel in der Strömung den Schnittpunkt der Laserstrahlen durchquert. Das von dem Partikel erzeugte Streulicht ist gegenüber dem Laserlicht in seiner Frequenz verschoben (Doppler-Effekt). Die Überlagerung des Streulichts beider Laserstrahlen führt zu einer Schwebung, deren Frequenz der Partikelgeschwindigkeit und damit der Fließgeschwindigkeit proportional ist. Mit der Wellenlänge des Laserlichts  $\lambda$ , der gemessenen Doppler-Frequenz  $f_D$  und dem Schnittwinkel  $\alpha$  der beiden Laserstrahlen gilt:

$$U = \frac{\lambda \cdot f_D}{2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (4.1)$$

Mit diesem Verfahren läßt sich eine Komponente der Fließgeschwindigkeit erfassen, nämlich der Absolutbetrag der Fließgeschwindigkeit in der Ebene der beiden Laserstrahlen senkrecht zur Winkelhalbierenden. Zur Messung des Vorzeichens wird einer der beiden Laserstrahlen in seiner Frequenz verschoben. Unter Abzug dieser sogenannten Shiftfrequenz von der gemessenen Doppler-Frequenz werden die Fließgeschwindigkeiten einschließlich ihres Vorzeichens erhalten. Die Aufnahme des räumlichen Strömungsvektors setzt die Überlagerung von mehr als zwei Laserstrahlen voraus.

Zu Beginn der Projektarbeit stand eine 2-Kanal-LDA-Anlage zur Verfügung, die später zur Erfassung der dritten Fließgeschwindigkeitskomponente aufgerüstet wurde. Auf der Grundlage einer 3-Kanal-Anlage aus dem Angebot von TSI (1981), wurde ein optisches System für die speziellen Randbedingungen des Mäandermodells, wie die Messung von unten durch die Gerinnesohle, konzipiert (s. Abb. 4.7).

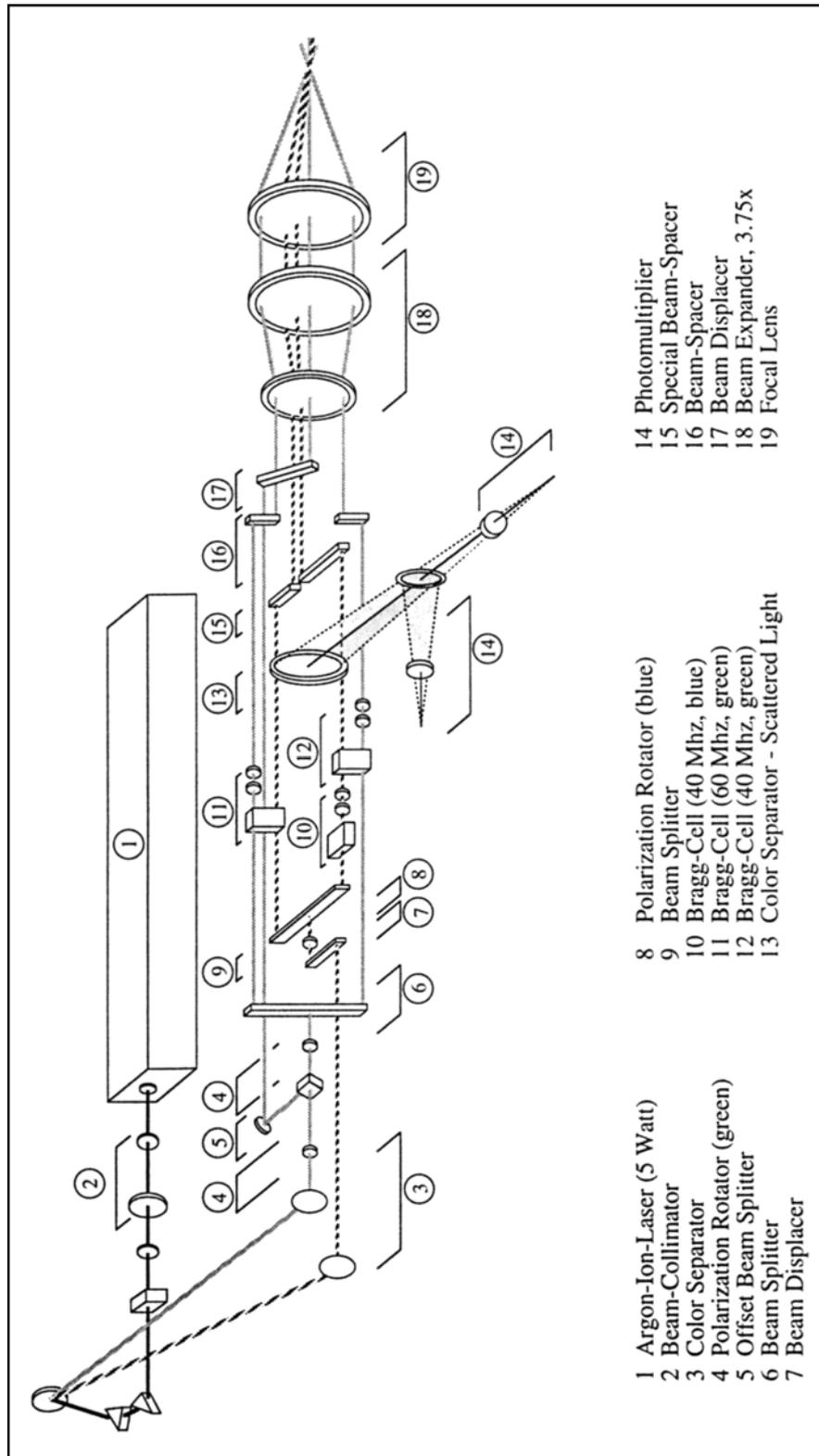


Abb. 4.7: 3-Kanal-LDA-System

Aus dem multifrequenten Licht eines Argon-Ion-Lasers werden zwei Spektrallinien abgetrennt, mit Wellenlängen von  $\lambda_b = 488 \text{ nm}$  (blaues Licht) und  $\lambda_g = 514,5 \text{ nm}$

(grünes Licht). Im weiteren optischen Strahlengang erfolgt der Aufbau der erforderlichen Fünf-Strahlen-Konfiguration (s. Abb. 4.8).

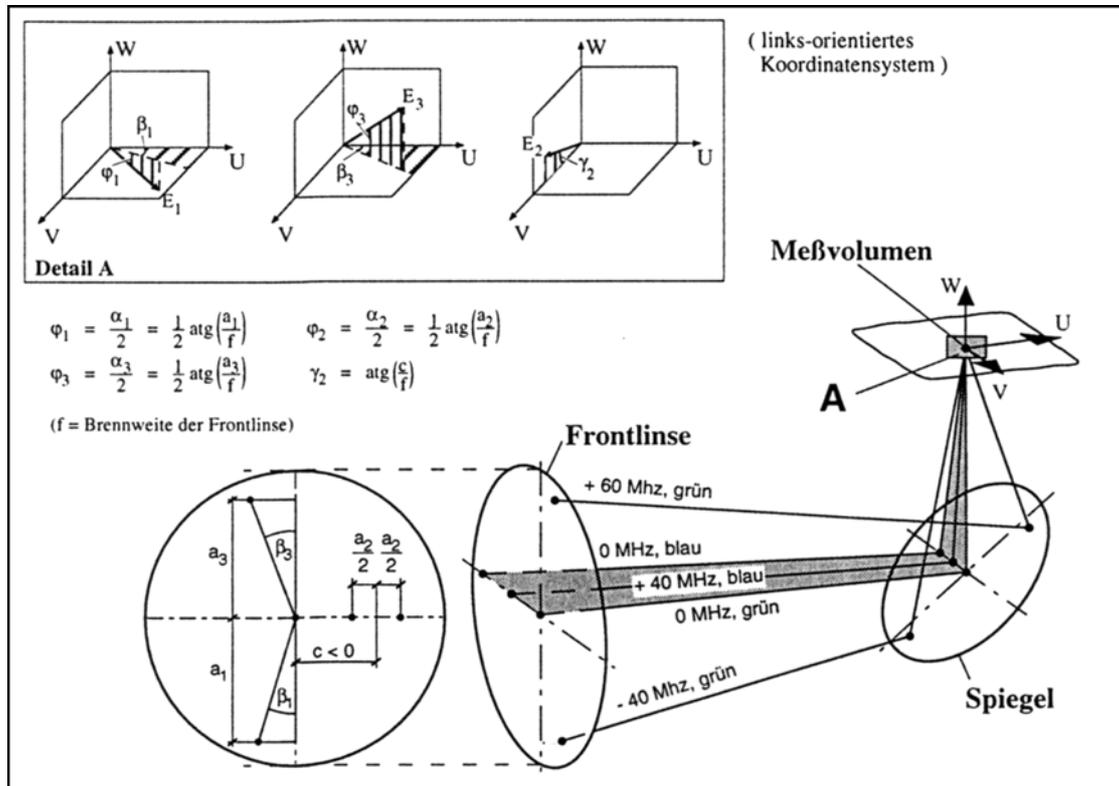


Abb. 4.8: Strahlenkonfiguration

Im Strahlengang werden drei Strahlen durch "Bragg-Zellen" um 40 bzw. 60 MHz geshiftet. Diese Frequenzshiftung hat neben der Erfassung vorzeichenbehafteter Fließbewegungen einen weiteren Grund: Die LDA-Anlage verwendet nur zwei Farben auf einer optischen Achse. Das Rückstreulicht kann daher mittels einer Farbtrennung nur in zwei unterschiedliche Signale aufgespalten und mit getrennten Photomultipliern erfaßt werden. Das blaue Doppler-Signal ist proportional zur Fließgeschwindigkeit  $E_2$  (vgl. Abb. 4.8). Das grüne Licht enthält mehrere Doppler-Signale. Im Frequenzbereich um  $-40$  MHz liegt die Fließgeschwindigkeit  $E_1$ . Die Fließgeschwindigkeit  $E_3$  liegt im Frequenzbereich um  $+20$  MHz und ist ein sogenanntes "On-Axis"-Signal. Im Gegensatz zur "Off-Axis"-Messung wird hierbei die Fließgeschwindigkeit in Richtung der optischen Achse gemessen. Sie ergibt sich aus der Überlagerung der Signale im Bereich von  $+60$  MHz und  $-40$  MHz. Die "On-Axis"-Fließgeschwindigkeit läßt sich wegen der sehr kleinen Schnittwinkel zwischen den Laserstrahlen um Größenordnungen genauer messen, als dies durch eine Berechnung aus den beiden "Off-Axis"-Signalen möglich wäre. Der Nachteil der "On-Axis"-Messung liegt in einem vergleichsweise schwachen Signal und einer entsprechend geringen Datenrate.

Die Komplexität der verwendeten LDA-Anlage macht eine exakte Justage der gewünschten Strahlenkonfiguration nahezu unmöglich. Die Schnittwinkel der Laserstrahlen weisen gegenüber ihrem Sollwert immer mehr oder weniger geringe Abweichungen auf. Dies verursacht gerade bei den sehr kleinen Fließgeschwindigkeiten in vertikaler Richtung einen erheblichen Fehler. Es wurde daher erforderlich die tatsächliche Strahlenkonfiguration vor der Frontlinse, also im Bereich paralleler Laserstrahlen, abzugreifen. Aus dem Abstand der einzelnen Laserstrahlen und der Brennweite der Frontlinse (hier: 480 mm) ergeben sich dann die gesuchten Schnittwinkel. (s. Abb. 4.8).

Mit diesen Schnittwinkeln läßt sich eine Transformationsmatrix formulieren, die den Zusammenhang zwischen dem momentanen Strömungsvektor  $\hat{e}_i$  in drei linear unabhängigen Raumrichtungen und dem kartesischen Koordinatensystem herstellt:

$$[\alpha_{ij}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cdot \cos \beta_1 & \cos \varphi_1 \cdot \sin \beta_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0,0 & \cos \gamma_2 & \sin \gamma_2 \\ \cos \varphi_3 \cdot \cos \beta_3 & \cos \varphi_3 \cdot \sin \beta_3 & \sin \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Die Fließgeschwindigkeiten  $\hat{e}_i$  ergeben sich über die Proportionalitätsbeziehung (Gl. 4.1) aus den gemessenen Doppler-Frequenzen  $f_{Dj}$ <sup>6</sup>:

$$\hat{e}_1 = \frac{\lambda_g \cdot f_{D1}}{2 \cdot \sin \varphi_1} \quad (4.3)$$

$$\hat{e}_2 = \frac{\lambda_b \cdot f_{D2}}{2 \cdot \sin \varphi_2} \quad (4.4)$$

$$\hat{e}_3 = \frac{\lambda_g \cdot (f_{D1} + f_{D3})}{2 \cdot \sin \varphi_3} \quad (4.5)$$

Die Transformationsvorschrift zur Berechnung des Strömungsvektors in kartesischen Koordinaten lautet nun:

$$\hat{u}_i = \alpha_{ij} \cdot \hat{e}_j \quad (4.6)$$

Jede Einzelmessung ergibt den momentanen Fließgeschwindigkeitsvektor  $\hat{u}_i$  an einem Punkt der Strömung. Über eine zeitliche Mittelung von 3000 Einzelmessungen werden Mittelwerte, Varianzen und Kovarianzen berechnet, die der mittleren Fließgeschwindigkeit und den Reynoldsspannungen entsprechen. Nur diese statistischen Größen werden für die weitere Auswertung auf Datenträgern gespeichert.

---

<sup>6</sup> Man beachte, daß  $f_{D3}$  die Doppler-Frequenz des "On-Axis"-Signals ist.

Leider erwies sich die Genauigkeit, mit der die Schnittwinkel zwischen den Laserstrahlen ermittelt werden konnten als unzureichend, da bereits eine Abweichung von  $0,1^\circ$  zu signifikanten Fehlern in der berechneten vertikalen Fließgeschwindigkeit  $W$  führte. Aus diesem Grund wurde  $W$  nach der vollständigen Vermessung eines Querschnitts mit einer Kontinuitätsbedingung optimiert (NEZU und RODI, 1985):

$$\int_0^B \int_0^H W dz dy = 0 \quad (4.7)$$

Die Optimierung wurde mit der iterativen Verbesserung der Schnittwinkel zwischen den drei grünen Laserstrahlen durchgeführt. Hierzu war es zweckmäßig die zuvor beschriebene statistische Auswertung nicht mit den Fließgeschwindigkeiten, sondern direkt mit den gemessenen Frequenzen durchzuführen. Mit den Gleichungen 4.8 und 4.9 ergibt sich dann der mittlere Strömungsvektor und der Reynoldsspannungstensor in kartesischen Koordinaten.

$$U_i = \alpha_{ij} \cdot E_j \quad (4.8)$$

$$[\overline{u_i u_j}] = [\alpha_{ik}]^T \cdot [\overline{e_k e_l}] \cdot [\alpha_{lj}] \quad (4.9)$$

### 4.1.3 Ergebnisse

Eine vollständige Darstellung aller experimentellen Datenreihen des Mäanders würde den Umfang dieses Berichtes sprengen. Im folgenden werden daher anhand von exemplarischen Meßreihen grundlegende Erkenntnisse zum Strömungsverhalten präsentiert. Die Gesamtheit der Meßdaten liegt auf Datenträgern gespeichert vor und kann am Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft angefordert werden.

#### 4.1.3.1 Allgemeines Abflußverhalten

Die Strömung im Mäander zeigt durch die Gliederung des Gerinnes in Flußschlauch und angrenzende Vorlandbereiche einige Besonderheiten. In Abbildung 4.9 sind die Abfluß-Wasserstandsbeziehungen für unterschiedliche Versuchsreihen dargestellt. Deutlich zu erkennen ist eine sprunghafte Reduktion des Abflußvermögens beim Überschreiten der Vorlandsohle ( $H > 0,10$  m). Dies ist auf den großen Anstieg des benetzten Umfangs und die daraus resultierende Erhöhung der Sohlschubspannungskräfte zurückzuführen. Bei geringen Vorlandfließtiefen ( $0,10$  m  $< H < 0,11$  m) ist ein Einfluß der unterschiedlichen Vorlandrauheiten auf die Abflußkapazität des Gerinnes kaum zu erkennen. Bis zu einer Fließtiefe von  $H = 0,115$  m bleibt der

Abfluß mit einer Spannweite von  $\pm 2,0$  l/s nahezu konstant. In diesem Fließtiefenbereich hat das Hauptgerinne den dominierenden Anteil am Gesamtabfluß.

Mit steigender Fließtiefe nimmt auch die Abflußkapazität zu, wobei der Zuwachs bei den Versuchen mit Vorlandrauheiten (I05 B06, I05 B12, I05 C06 und I05 C12) erheblich geringer ist als bei glatter Vorlandsohle. Bei einer Fließtiefe von  $H = 0,17$  m beträgt die Abflußkapazität für den Versuch I05 A00 etwa das zwei- bis dreifache des Wertes bei rauhen Vorländern.

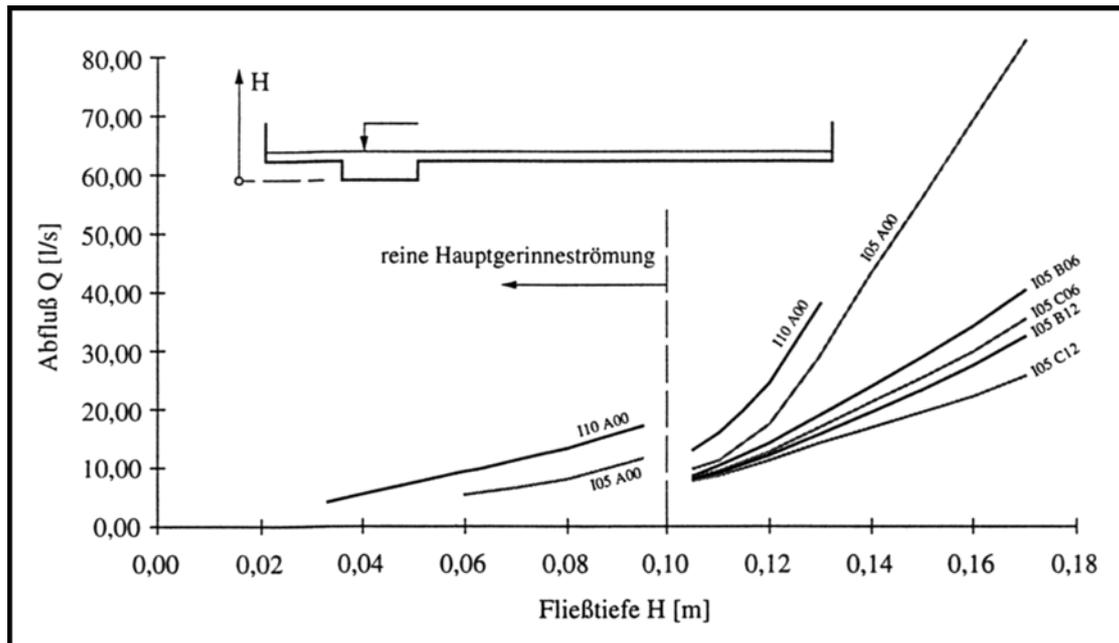


Abb. 4.9: Schlüsselkurven des Mäandermodells

Diese große Differenz legt den Schluß nahe, daß mit zunehmender Fließtiefe das Strömungsverhalten von dominantem Hauptgerinne- zu dominantem Vorlandabfluß wechselt.

Zur weiteren Bestätigung dieses Sachverhaltes sind in Abbildung 4.10 exemplarisch für den Querschnitt Q07 die tiefengemittelten Längsgeschwindigkeiten bei drei Fließtiefen für die Versuchsreihen I05 A00 (glatte Vorländer) und I05 B06 (rauhe Vorländer) aufgetragen. Der Wechsel im Dominanzverhalten läßt sich bei dem Versuch mit glatten Vorländern (A00) sehr deutlich erkennen.

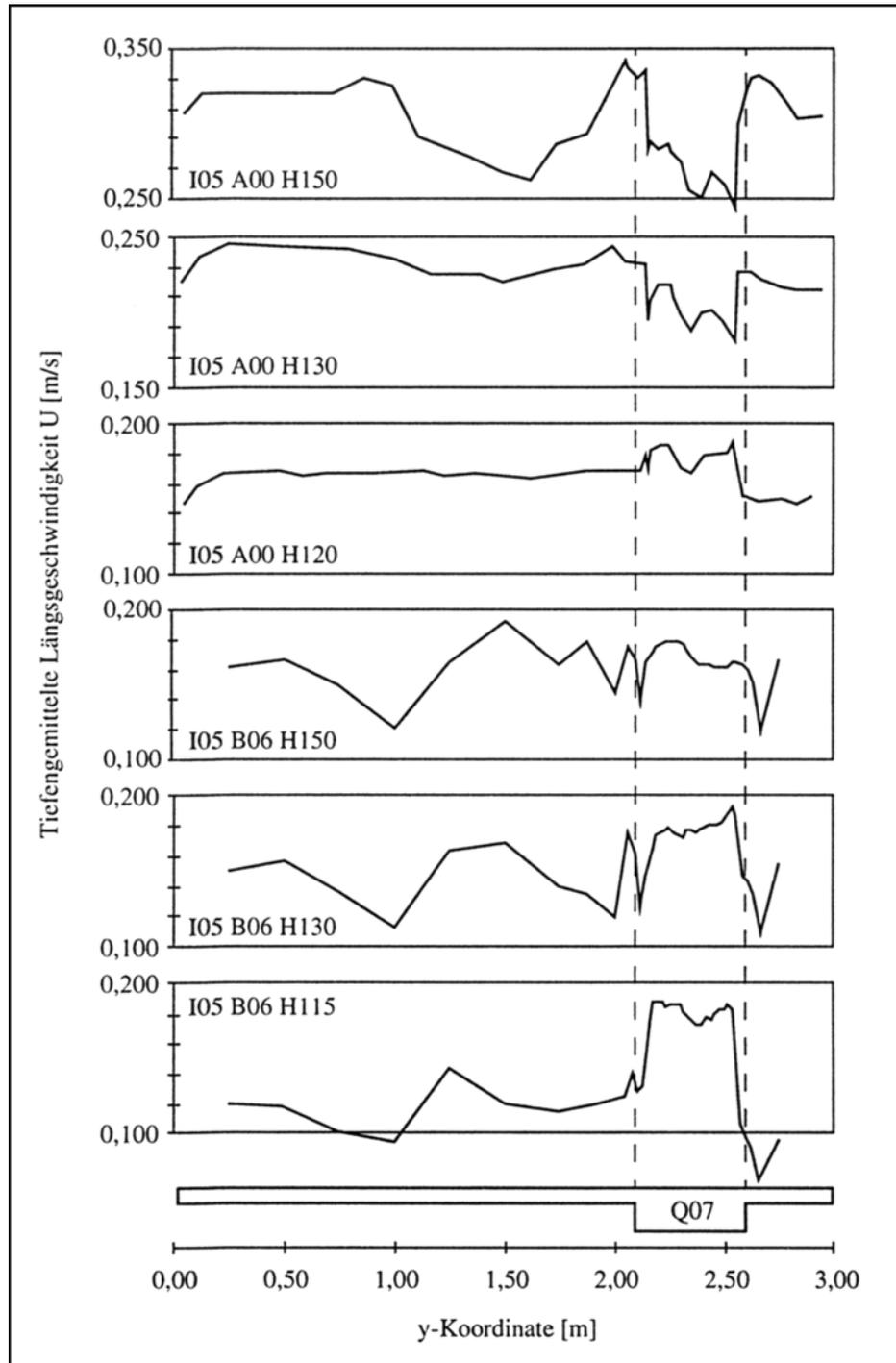


Abb. 4.10: Tiefengemittelte Längsgeschwindigkeit in Querschnitt Q07

Bei einer Fließtiefe H120 ist die Längsgeschwindigkeit im Hauptgerinne größer als auf den Vorländern. Jedoch bereits bei dem Versuch H130 überwiegt der Vorlandabfluß. Mit weiter steigender Fließtiefe (H150) wird dieses Strömungsverhalten noch deutlicher; die Geschwindigkeitsgradienten am Übergang vom Hauptgerinne zum Vorland werden extrem steil. Bei der Versuchsreihe mit rauhen Vorländern (B06) ist eine ähnliche Tendenz feststellbar. Bei der maximal untersuchten Fließtiefe

fe (H150) ist allerdings in diesem Fall die Dominanz des Vorlandabflusses noch nicht vollständig erreicht. Die wesentlich höhere Rauheit der Vorländer verhindert die rasche Zunahme der Abflußkapazität, so daß der dominante Hauptgerinneabfluß über einen größeren Fließtiefenbereich erhalten bleibt.

Im Fall einer dominanten Vorlandströmung bewegt sich eine Wasserschicht in Modellängsrichtung über das Vorland und den im Hauptgerinne befindlichen Wasserkörper hinweg. Der Massenaustausch zwischen Flußschlauch und Vorland ist relativ gering. Bei einer dominanten Hauptgerinneströmung folgt ein Wasserkörper dem Verlauf des mäandrierenden Flußschlauches. Der Massenaustausch zwischen Flußschlauch und Vorland ist relativ hoch. Fluidmassen der Vorlandströmung werden von der Hauptgerinneströmung erfaßt und weiter transportiert. Im Gegenzug werden andere Fluidmassen vom Flußschlauch auf das Vorland gespült. Diese Vorgänge werden durch ausgeprägte Sekundärströmungen und hohe Turbulenzgrade im Flußschlauch begleitet, die in den nächsten Kapiteln diskutiert werden.

Auffällig an den tiefengemittelten Längsgeschwindigkeiten ist für den Versuch I05 A00 H150 eine deutliche Geschwindigkeitssenke im linken Vorlandbereich. Die Verzögerung des Abflusses wird verursacht durch langsam fließende, aus dem Hauptgerinne austretende Fluidmassen (s. Abb. 4.11). Umgekehrt ist bei den Versuchen mit rauher Vorlandsohle und dominantem Hauptgerinneabfluß (I05 B06 H115 und H130) im gleichen Bereich eine leicht erhöhte Fließgeschwindigkeit festzustellen, die analog durch schneller fließende Fluidmassen aus dem Hauptgerinne verursacht wird.

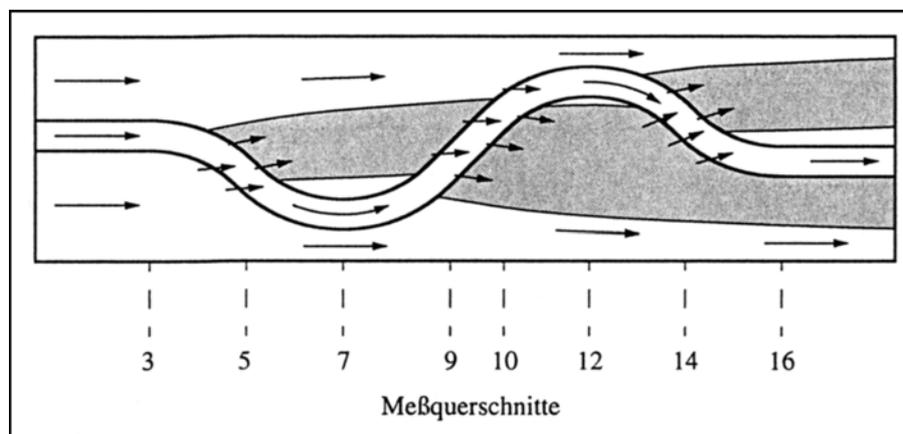


Abb. 4.11: Generelles Strömungsbild im Mäander

Die Geschwindigkeitssenke in Abbildung 4.10 bei den Versuchen I05 B06 bei einer Position von  $y = 1,00$  m hat mit diesem Verhalten der Strömung nichts zu tun. Sie wird durch ein stabförmiges Bewuchselement verursacht, das sich unmittelbar vor dem Meßpunkt befindet und im Nachlauf (Kármán'sche Wirbelstraße) zu reduzierten Geschwindigkeiten führt. Mit Hinblick auf die numerische Simulation, die nur

einen mittleren Rauheitseinfluß der Vorlandsohle berücksichtigt, ist die Strömungsbeeinflussung durch ein einzelnes Rauheitselement eher unerwünscht.

Die Beschleunigung der Vorlandströmung durch schnelle Fluidmassen aus dem Hauptgerinne wird im mittleren Gerinnebereich, wo der Flußschlauch über eine größere Strecke schräg zur Vorlandströmung verläuft, noch deutlicher. Abbildung 4.12 stellt die resultierenden Geschwindigkeiten in Querschnitt 10 für zwei Versuche mit unterschiedlicher Vorlandrauheit bei der Fließtiefe H120 dar. In beiden Fällen ist die Fließgeschwindigkeit auf dem rechten Vorland höher als auf dem linken.

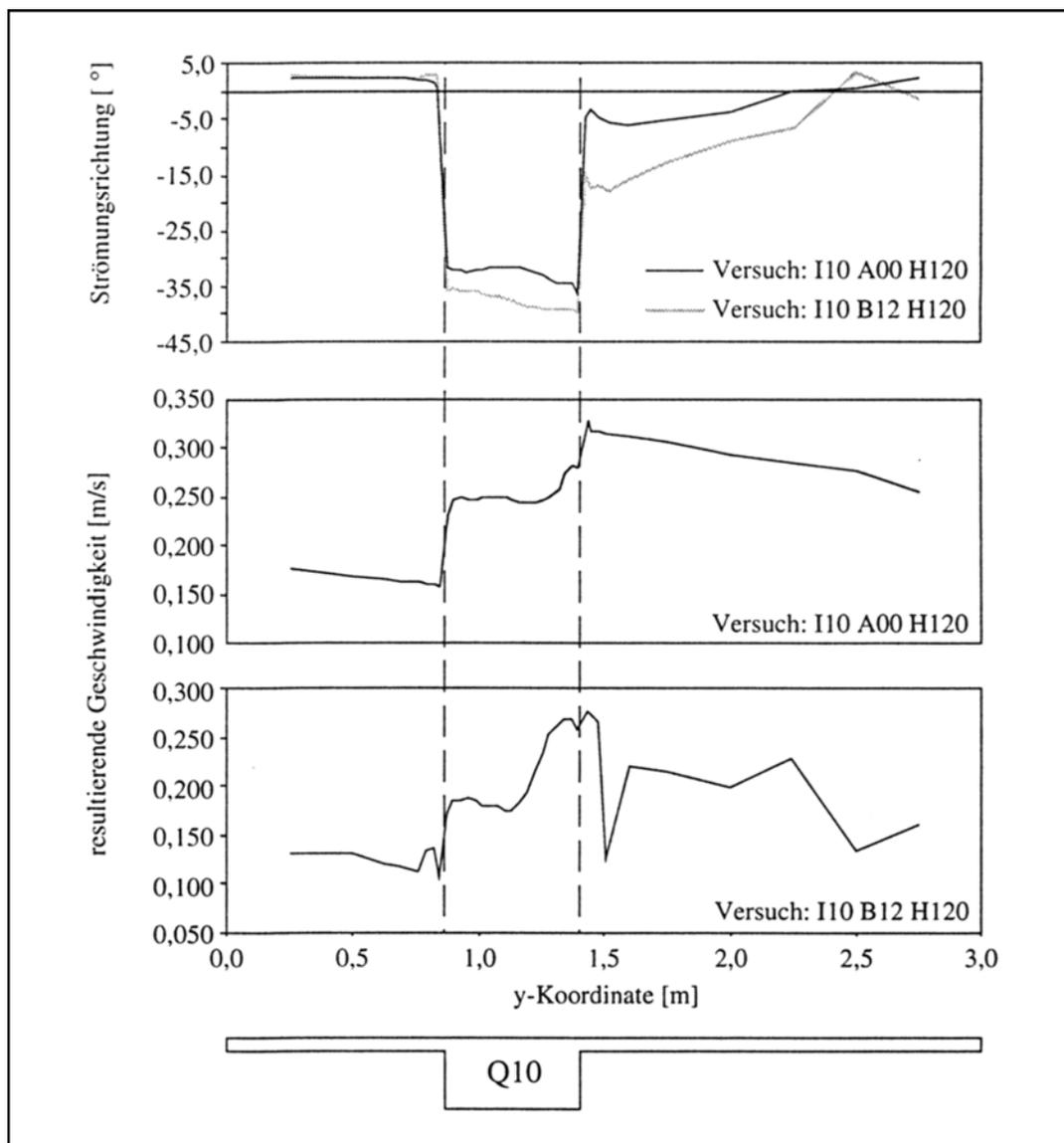


Abb. 4.12: Resultierende Geschwindigkeiten in Querschnitt 10 (tiefengemittelt)

Durch die plötzliche Querschnittseinengung, die die Strömung beim Verlassen des Hauptgerinnes erfährt, werden die Fluidmassen beschleunigt. Der Versuch I10 A00 H120 zeigt eine extreme Beschleunigung der Vorlandströmung. Die resultierende

Geschwindigkeit flacht mit zunehmendem Abstand vom Hauptgerinne nur leicht ab und beträgt etwa das Zweifache derjenigen auf dem linken Vorland. Bei diesem Versuch mit glatter Vorlandsohle ist die resultierende Geschwindigkeit auf dem rechten Vorland sogar höher als im Hauptgerinne. Demgegenüber werden die Fluidmassen aus dem Hauptgerinne bei dem Versuch I10 B12 H120 durch das rauhe Vorland wesentlich stärker verzögert und können nicht mehr ungehindert abfließen. Insgesamt reduziert sich hierdurch die Masse des aufs Vorland transportierten Fluids. Und der Anstieg der Fließgeschwindigkeit vom linken zum rechten Ufer des Hauptgerinnes ist wesentlich größer als bei dem Versuch mit glatter Vorlandsohle. Dies macht sich auch in der Strömungsrichtung (s. Abb. 4.12 oben) bemerkbar. Der Winkel zwischen dem Hauptgerinne und der Modelllängsrichtung beträgt  $-45^\circ$  bei Querschnitt 10. Die Strömungsrichtung weicht von dieser Richtung ab und zwar umso stärker je glatter das Vorland ist. Bei rauher Vorlandsohle wird zudem die Strömungsrichtung auf dem rechten Vorland wesentlich stärker von der Richtung der Mäanderströmung beeinflusst. Letztlich bestätigt auch dies die mit höherer Vorlandrauheit zunehmende Dominanz der Hauptgerinneströmung.

#### 4.1.3.2 Sekundärströmung

Die Wechselwirkung zwischen der nahezu parallelen Vorland- und der Mäanderströmung verursacht intensive Sekundärströmungen und hohe Turbulenzgrade im Bereich des Flußschlauches. In den Abbildungen 4.13 und 4.14 sind die Sekundärströmungen für die Versuchsreihe I05 B06 bei zwei Fließtiefen H130 und H150 für den Bereich des Hauptgerinnes dargestellt. Die einzelnen Wirbel wurden farblich hervorgehoben, wobei gleiche Farben in aufeinanderfolgenden Querschnitten den räumlichen Zusammenhang der Spiralströmung beschreiben. Neben der Sekundärströmung sind in den beiden Abbildungen in einer Grundrißdarstellung die tiefen gemittelten Geschwindigkeitsvektoren gegeben.

Die Spiralströmung im Mäander mit überströmten Vorländern zeigt gegenüber der Strömung in einem kompakten, gekrümmten Gerinne ein vollständig anderes Bild. In den einzelnen Querschnitten weist der dominierende Wirbel (farblich hervorgehoben) einen Drehsinn auf, der demjenigen in einem kompakten Mäander entgegengesetzt ist. Diese Wirbelstrukturen entstehen jeweils an dem vom Vorland angeströmten Ufer (siehe z.B. Querschnitt 5, rechtes Ufer oder Querschnitt 9 linkes Ufer). Ihre Entstehung ist identisch mit der Rezirkulation hinter einer überströmten negativen Stufe.

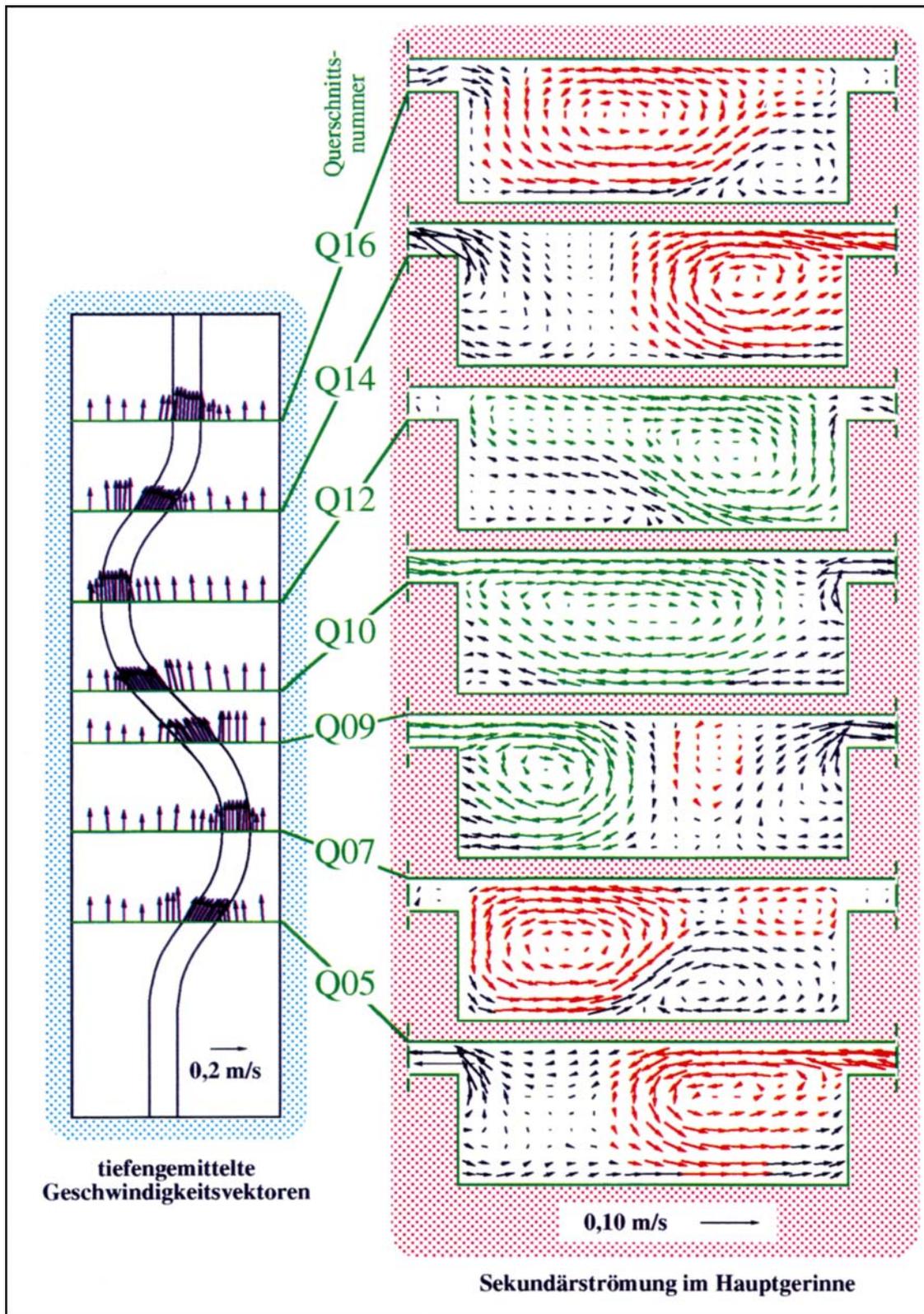


Abb. 4.13: Sekundärströmung, Versuch I05 B06 H130

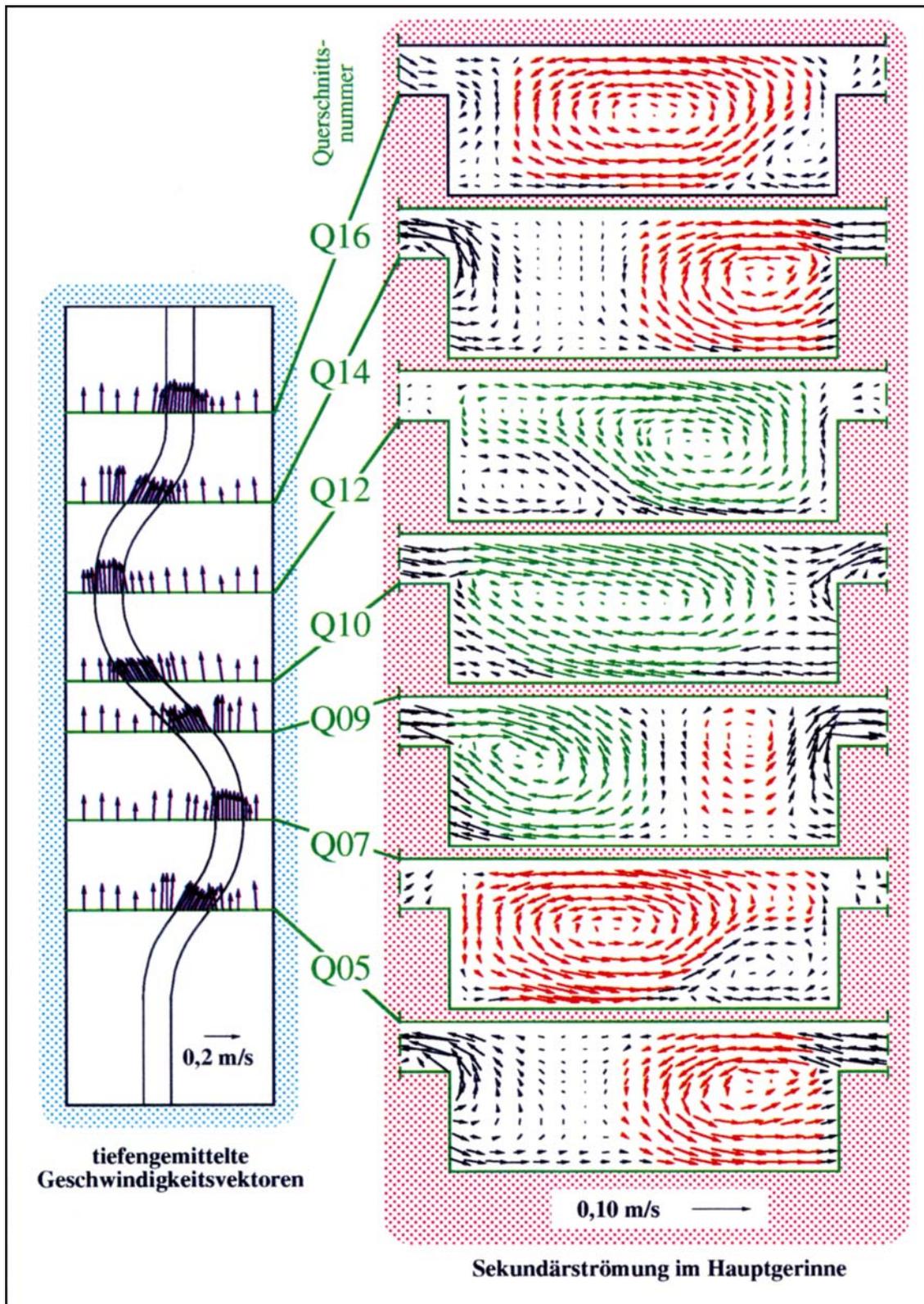


Abb. 4.14: Sekundärströmung, Versuch I05 B06 H150

Erstreckt sich die schräg angeströmte Stufe über eine größere Breite des Gerinnes, wie im Bereich von Querschnitt 9 und 10, so ist eine fortschreitende den gesamten Hauptgerinnequerschnitt vereinnehmende Ausdehnung des dominierenden Wirbels feststellbar. Erst in den darauffolgenden Scheitelpunkten des Mäanders (Querschnitte 7, 12 und 16) fehlt der Einfluß der Stufenströmung. Hier ist neben dem dominierenden Wirbel ein weiterer mit entgegengesetztem Drehsinn zu beobachten (siehe z.B. rechts unten in Querschnitt 7). Dieser Wirbel entsteht vermutlich analog zur Sekundärströmung in einem kompakten Mäander unter dem Einfluß der Fliehkraft.

Der Vergleich zwischen den beiden Versuchsreihen zeigt ein qualitativ identisches Bild. Jedoch sind bei der höheren Fließtiefe (H150) die Ausmaße des unter Fliehkrafteinfluß entstandenen Wirbels deutlich geringer. Hier macht sich die mit steigender Fließtiefe zunehmend dominierende Vorlandströmung bemerkbar.

### 4.1.3.3 Turbulenzverhalten

Neben der in jeder Flachwasserströmung auftretenden sohlinduzierten Turbulenz, bilden sich in der Strömung im Mäandermodell Scherschichten aus, die zu sehr hohen Turbulenzgraden führen. Dies sind vor allem die Bereiche, in denen das Hauptgerinne schräg zur Vorlandströmung verläuft. In den Abbildungen 4.15 und 4.16 sind zur Verdeutlichung die turbulenten Normalspannungen  $\overline{\rho u u}$  und  $\overline{\rho v v}$  in Farbrastergraphiken dargestellt. Ausgeprägte Scherschichten sind in den Querschnitten 5 und 14 im rechten Bereich sowie in den Querschnitten 9 und 10 im linken Bereich des Hauptgerinnes auszumachen. Hier trifft die relativ parallele Vorlandströmung auf das schräg verlaufende Hauptgerinne. Die an den sich ausbildenden Scherschichten produzierte Turbulenz wird von der Spiralströmung im Hauptgerinne weitertransportiert. In Folge läßt sich eine interessante Übereinstimmung zwischen der Position der höchsten Turbulenzgrade im Hauptgerinne und der dominierenden Wirbel der Sekundärströmung feststellen. So hat sich zum Beispiel in Querschnitt 5 bereits eine "Turbulenzwolke" ausgebildet, deren Zentrum ziemlich genau mit dem dort befindlichen Wirbelzentrum der Sekundärströmung (siehe Abb. 4.13) übereinstimmt. Im darauffolgenden Meßquerschnitt 7 entfällt die von der Vorlandströmung gebildete Scherschicht. Die "Turbulenzwolke" weist kein direktes Zentrum mehr auf. Durch die Spiralströmung im Mäander wurde sie zum linken Ufer des Hauptgerinnequerschnitts transportiert. In Querschnitt 9 bildet sich dann auf der linken Seite eine Scherschicht aus, die wiederum im Bereich des dominierenden Wirbels der Sekundärströmung zu hohen Turbulenzgraden führt. Diese Scherschicht erstreckt sich aufgrund der Geometrie des Mäanders (gerades Mittelstück) über einen etwas längeren Abschnitt. In Folge sind in Querschnitt 10 die höchsten Turbulenzen festzustellen.

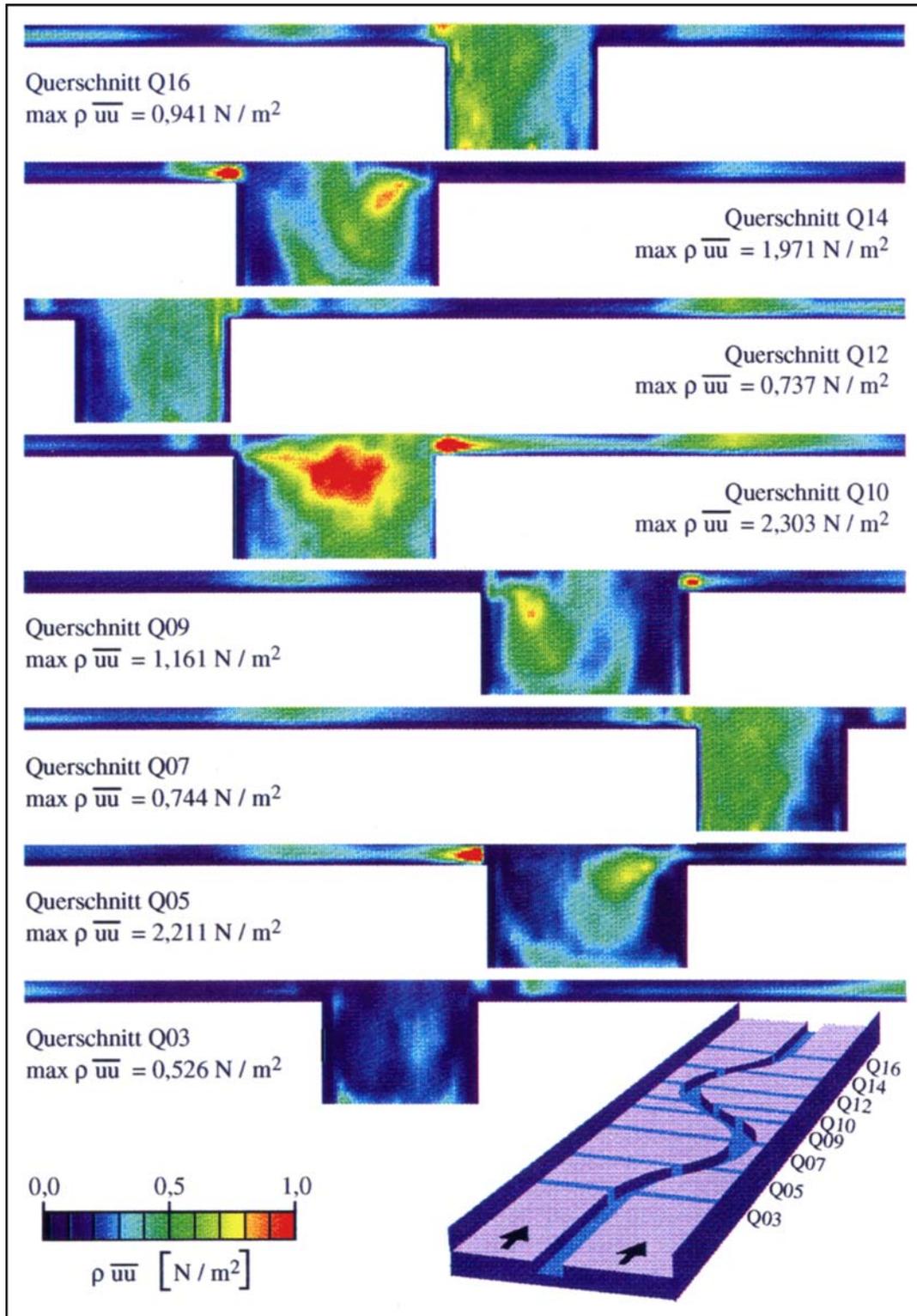


Abb. 4.15: Reynoldsspannungen  $\rho \overline{uu}$ , Versuch I05 B06 H130

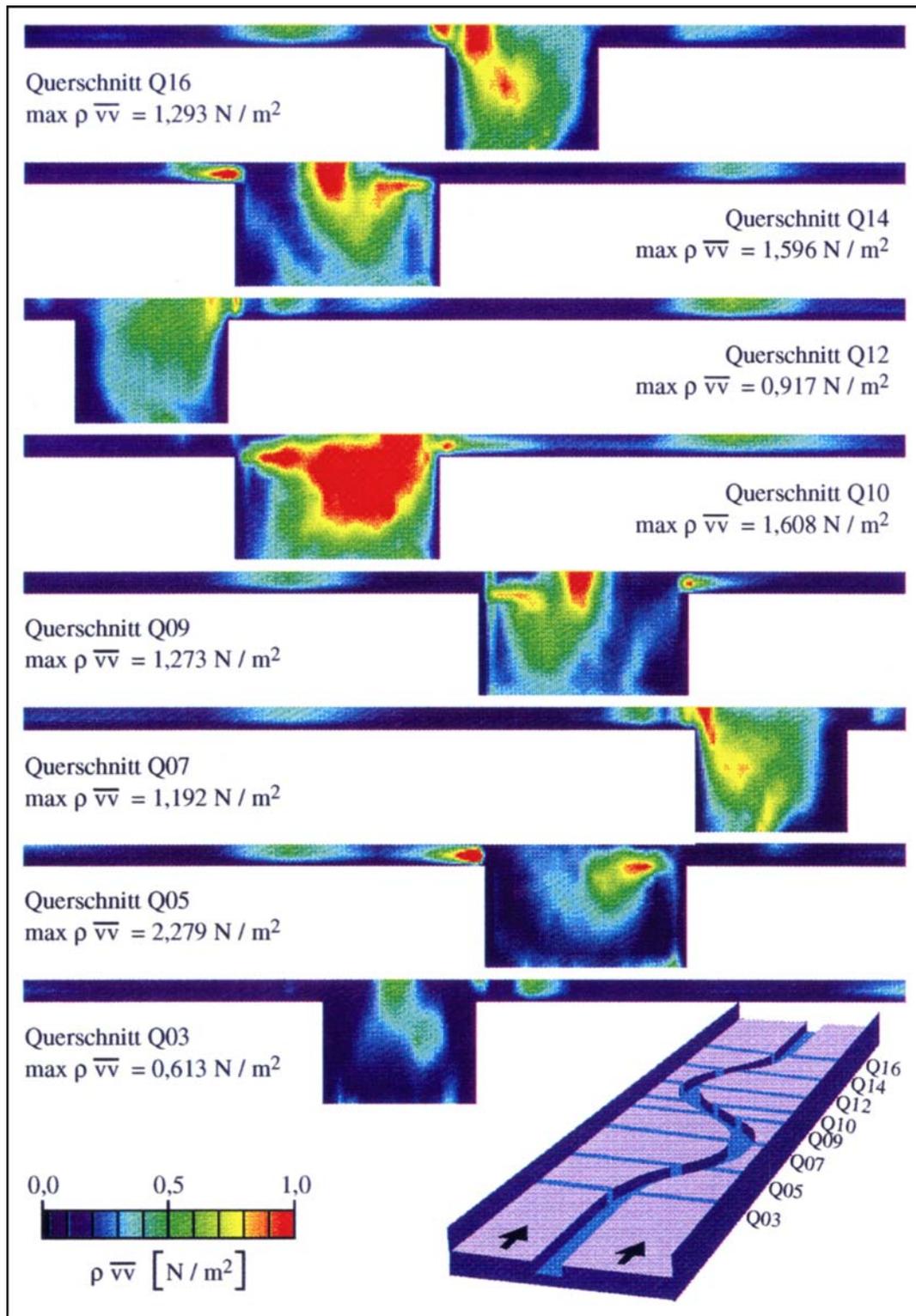


Abb. 4.16: Reynoldsspannungen  $\rho \overline{v'v'}$ , Versuch I05 B06 H130

Daneben sind weitere Bereiche mit hohen Turbulenzen zu erkennen, die nicht direkt einer Scherschicht zugeordnet werden können. Dies sind zum einen Punkte mitten im Vorlandbereich, wo die Messung unmittelbar hinter einem stabförmigen

Bewuchselement erfolgte (vgl. Kap. 4.1.3.1). Zum anderen sind es jene Stellen, an denen Fluidmassen aus dem Hauptgerinne auf das Vorland transportiert werden (siehe z.B. in Querschnitt 9 und 10: Übergang vom Hauptgerinne auf das rechte Vorland). Hier treten absolut die maximalen turbulenten Normalspannungen auf. Interessant an diesen Stellen ist, daß sie extrem von der Rauheit des Vorlandes abhängig sind.

In Abbildung 4.17 wurden die tiefengemittelten Turbulenzgrade für Meßreihen mit unterschiedlicher Vorlandrauheit für die beiden Querschnitte 10 und 12 zusammengestellt. Der Grad der Turbulenz wurde nach Gleichung 4.10 berechnet:

$$k^* = \frac{\overline{u_i u_j}}{U_j U_j} \quad (4.10)$$

Bei dem Versuch mit glatter Vorlandsohle (I10 A00 H120) ist in Querschnitt 10 am Übergang zum rechten Vorland kein ausgeprägt hoher Turbulenzgrad festzustellen. Demgegenüber treten bei den drei anderen Versuchen an dieser Stelle extrem hohe Turbulenzen auf. Mit zunehmender Fließtiefe, also mit zunehmender Dominanz der Vorlandströmung, nehmen diese Turbulenzgrade drastisch ab (Versuch I05 B12 H150). Damit wird die Ursache für die hohen Turbulenzen an diesen Punkten deutlich. Bei dem Versuch mit glatter Vorlandsohle erfahren die aus dem Hauptgerinne stammenden Fluidmassen keinen nennenswerten Widerstand und können ungehindert abströmen. Anders bei den Versuchen mit rauher Vorlandsohle. Hier wird die Vorlandströmung durch die hohe Rauheit erheblich verzögert. Die Fluidmassen aus dem Hauptgerinne treffen in diesem Fall auf eine langsamer fließende Vorlandströmung, die zu einer hohen Verwirbelung der Fluidmassen führt. Mit zunehmender Fließtiefe gleichen sich die Fließgeschwindigkeitsdifferenzen zwischen Hauptgerinne und Vorland mehr und mehr aus, was zu abnehmenden Turbulenzgraden führt.

Die turbulenten Normalspannungen ließen sich in Verifikationsmessungen genau wie die Fließgeschwindigkeiten mit einer hohen Genauigkeit reproduzieren; die Streuung der Meßwerte lag unter 5 %. Diese gute Genauigkeit konnte bei den turbulenten Schubspannungen nicht erreicht werden; die Reproduktionsmessungen ergaben teilweise Abweichungen von 100 %. Auch eine drastische Erhöhung der Anzahl der Meßwerte für die statistische Auswertung auf 8000 ergab kaum eine Verbesserung. Die Ursache hierfür wird in der niedrigen zeitlichen Auflösung (zu geringe Datenrate von 50 Hz) vermutet, bei der die kleinsten turbulenten Strukturen nicht erfaßt werden. Hier ist für zukünftige Projekte ein eindeutiger Entwicklungsbedarf festzustellen. Die in den Abbildungen 4.18 bis 4.20 dargestellten tiefengemittelten turbulenten Schubspannungen seien an dieser Stelle ohne weitere Interpretationen angefügt.

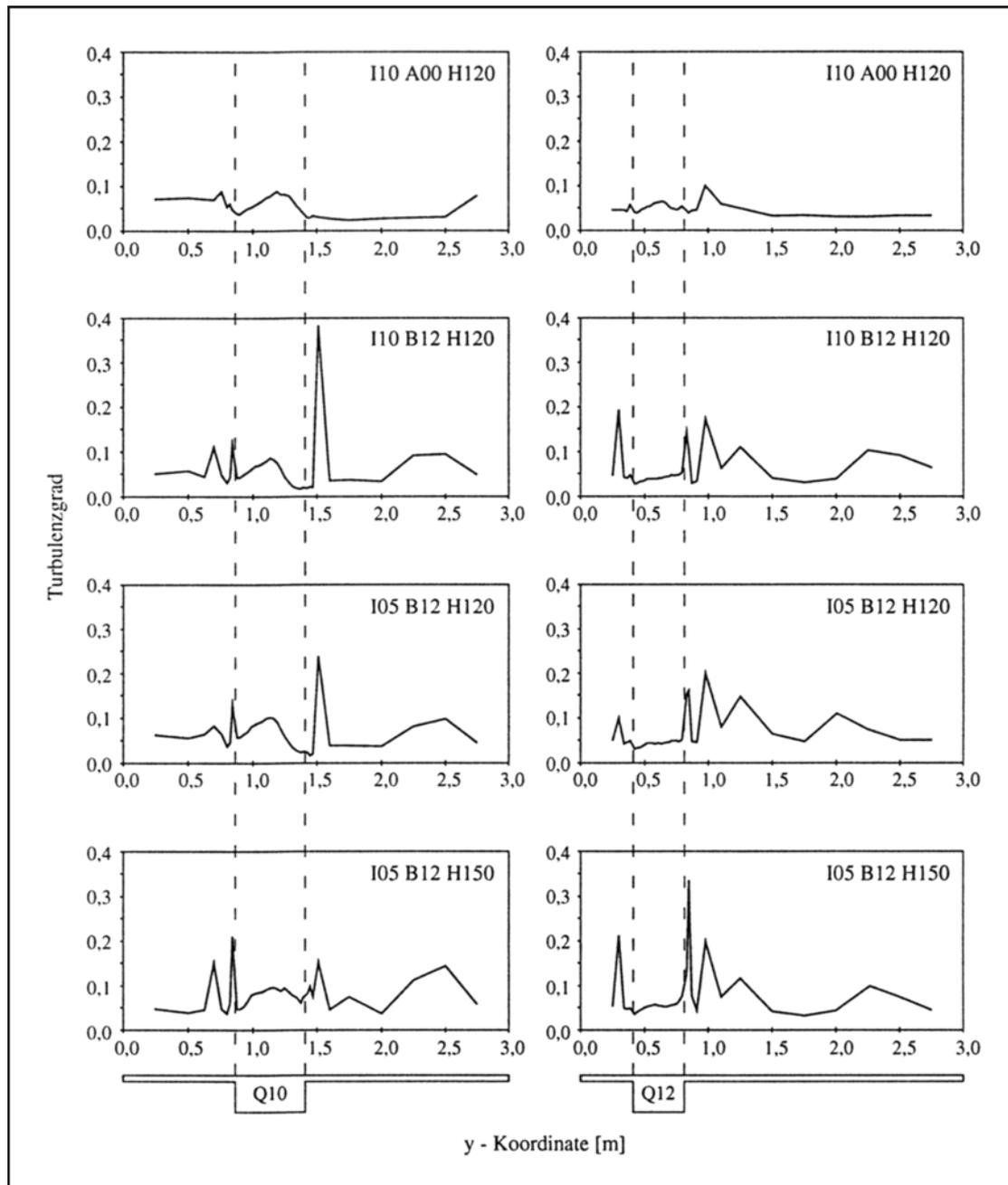


Abb. 4.17: Tiefengemittelter Turbulenzgrad

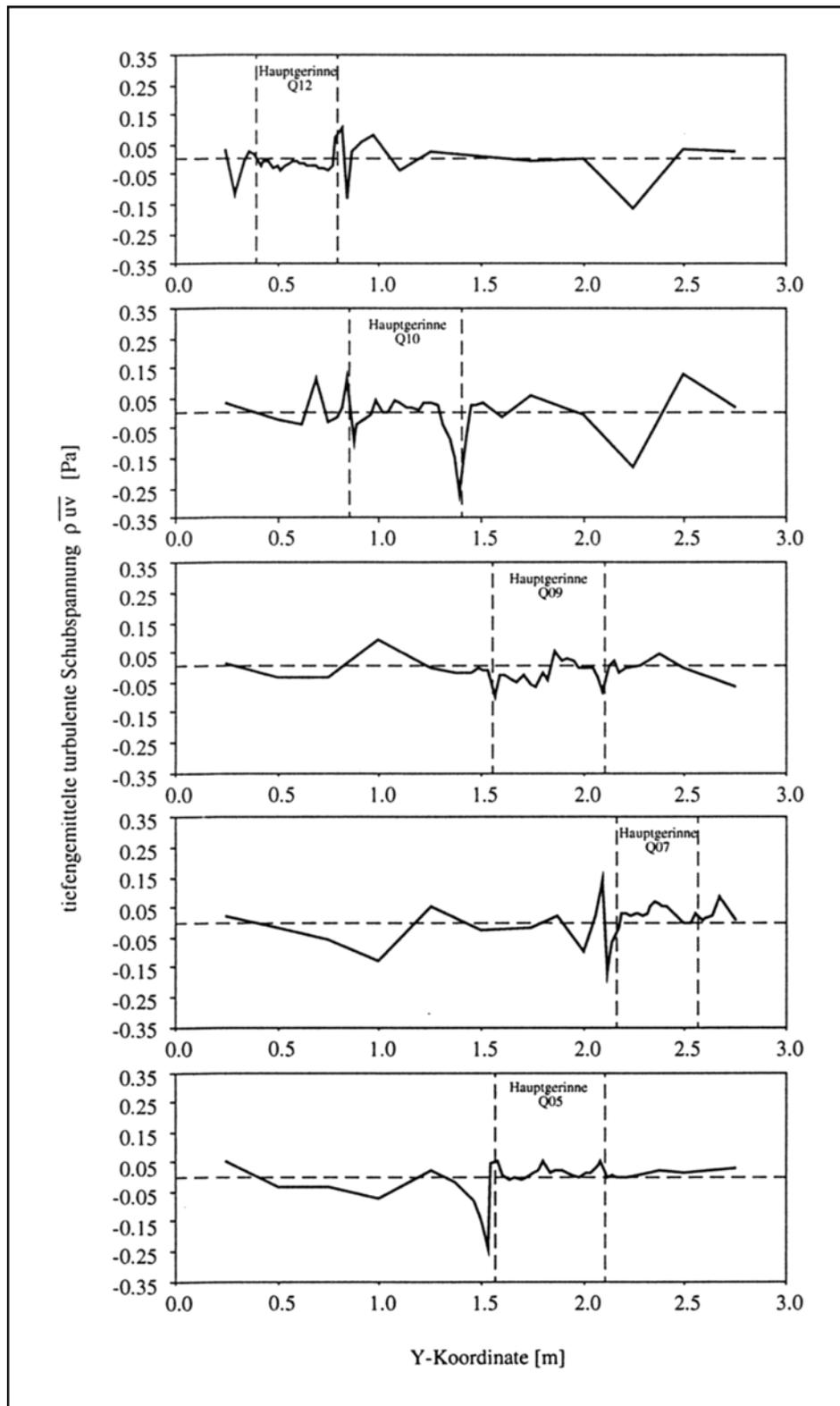


Abb. 4.18: Tieftengemittelte turbulente Schubspannung  $\overline{\rho uv}$   
Versuch I05 B06 H130

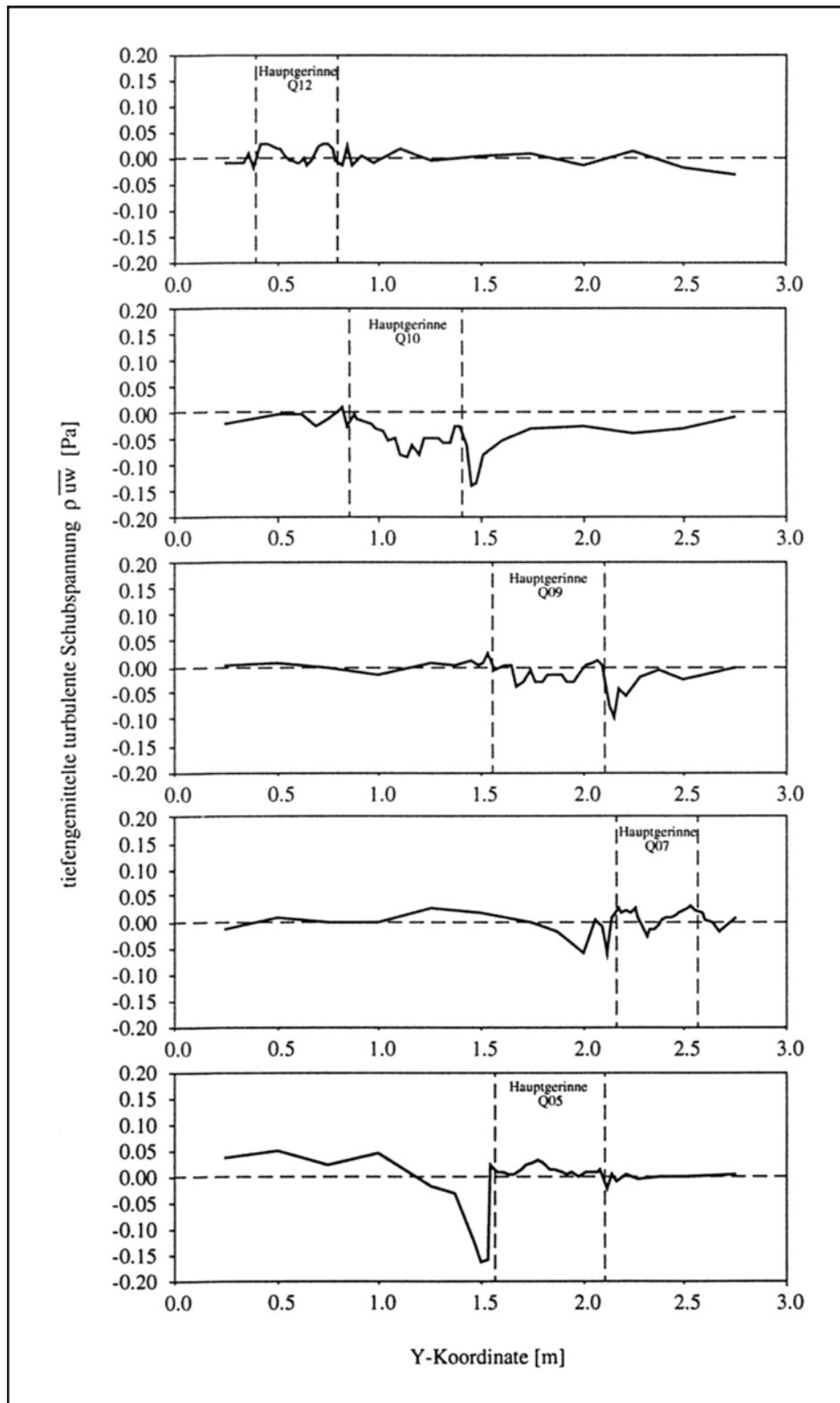


Abb. 4.19: Tiefigemittelte turbulente Schubspannung  $\overline{\rho u'w'}$   
Versuch I05 B06 H130

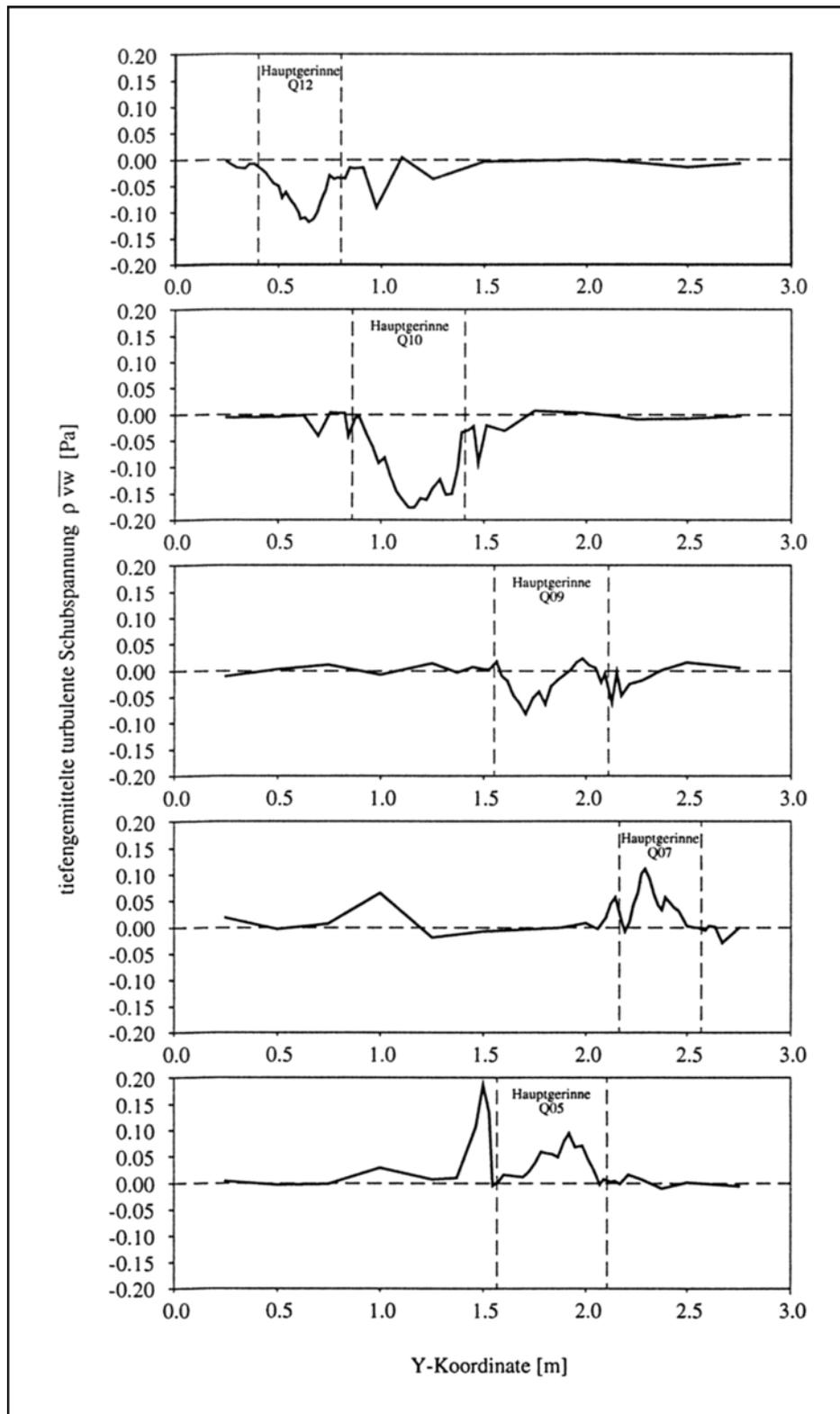


Abb. 4.20: Tieftengemittelte turbulente Schubspannung  $\rho \overline{v_w}$   
Versuch I05 B06 H130

#### 4.1.3.4 Dispersive Terme

Mit Blick auf die numerische Modellierung der Mäanderströmung mit dem zweidimensional tiefengemittelten Simulationsmodell erlangen die meßtechnisch erfaßten dispersiven Terme (vgl. Gl. 2.10) eine besondere Bedeutung, da sie in der Simulation wegen fehlender allgemeingültiger Ansätze vernachlässigt werden müssen. Sie haben in der Strömungsberechnung jedoch den gleichen Stellenwert wie die turbulenten und viskosen Spannungsterme.

Die dispersiven Terme ergeben sich aus der in vertikaler Richtung integrierten Differenz der Geschwindigkeit in der Höhe  $z$  zum tiefengemittelten Wert. Sie lassen sich daher relativ einfach aus den Meßdaten ermitteln. In Abbildung 4.21 ist die Komponente  $D_{22}$  des Dispersionstensors exemplarisch für den Querschnitt Q07 bei dem Versuch I05 B12 H150 dargestellt. Zur Gegenüberstellung beinhaltet die Abbildung außerdem die tiefengemittelte Fluktuation  $\overline{v'v'}$  sowie die dreidimensionalen Meßdaten, Sekundärströmung und Fluktuation. Deutlich zu erkennen ist der direkte Zusammenhang zwischen den Wirbeln der Sekundärströmung und dem dispersiven Term  $D_{22}$ . In Bereichen mit ausgeprägter Sekundärströmung ist die Profilungleichförmigkeit der lateralen Geschwindigkeit  $V$  sehr groß. Das Zentrum des dominierenden Wirbels und das Maximum der Dispersion befinden sich daher am gleichen Ort. Auf den angrenzenden Vorlandabschnitten ist die Dispersion zu vernachlässigen. Zwischen Fluktuation und Dispersion ist ein schwacher Zusammenhang feststellbar.

Der größere Einfluß der dispersiven Terme auf das Strömungsgeschehen im Flußschlauch wird aus dem Vergleich zur Fluktuation deutlich.  $D_{22}$  nimmt hier im Mittel die größeren Werte an. Aus diesem Grund kann von der zweidimensional-tiefengemittelten Strömungsmodellierung selbst bei einer korrekten Erfassung der Turbulenz nicht erwartet werden, daß die Berechnungsergebnisse unmittelbar eine gute Übereinstimmung mit den Meßdaten aufweisen (s. Kap. 5.2.3). Zwar ist es anhand der Meßdaten möglich für die spezielle Simulation des Mäanders die Dispersion explizit vorzugeben, in der praktischen Anwendung auf natürliche Strömungen wird dies in der Regel jedoch versagen.

Eine weitergehende Analyse der Dispersion, mit dem Ziel allgemeine Zusammenhänge zu tiefengemittelten Strömungsparametern, wie mittlere Fließgeschwindigkeit oder turbulente kinetische Energie, zu formulieren, ergab kaum brauchbare Resultate. Die Berücksichtigung der Dispersion im tiefengemittelten Strömungsmodell kann daher im Einzelfall nur über eine Kalibrierung des numerischen Modells erfolgen (vgl. Kap. 5.2.3). Aus diesem Grund wurde die Entwicklung des dreidimensionalen Strömungsmodells vorrangig verfolgt.

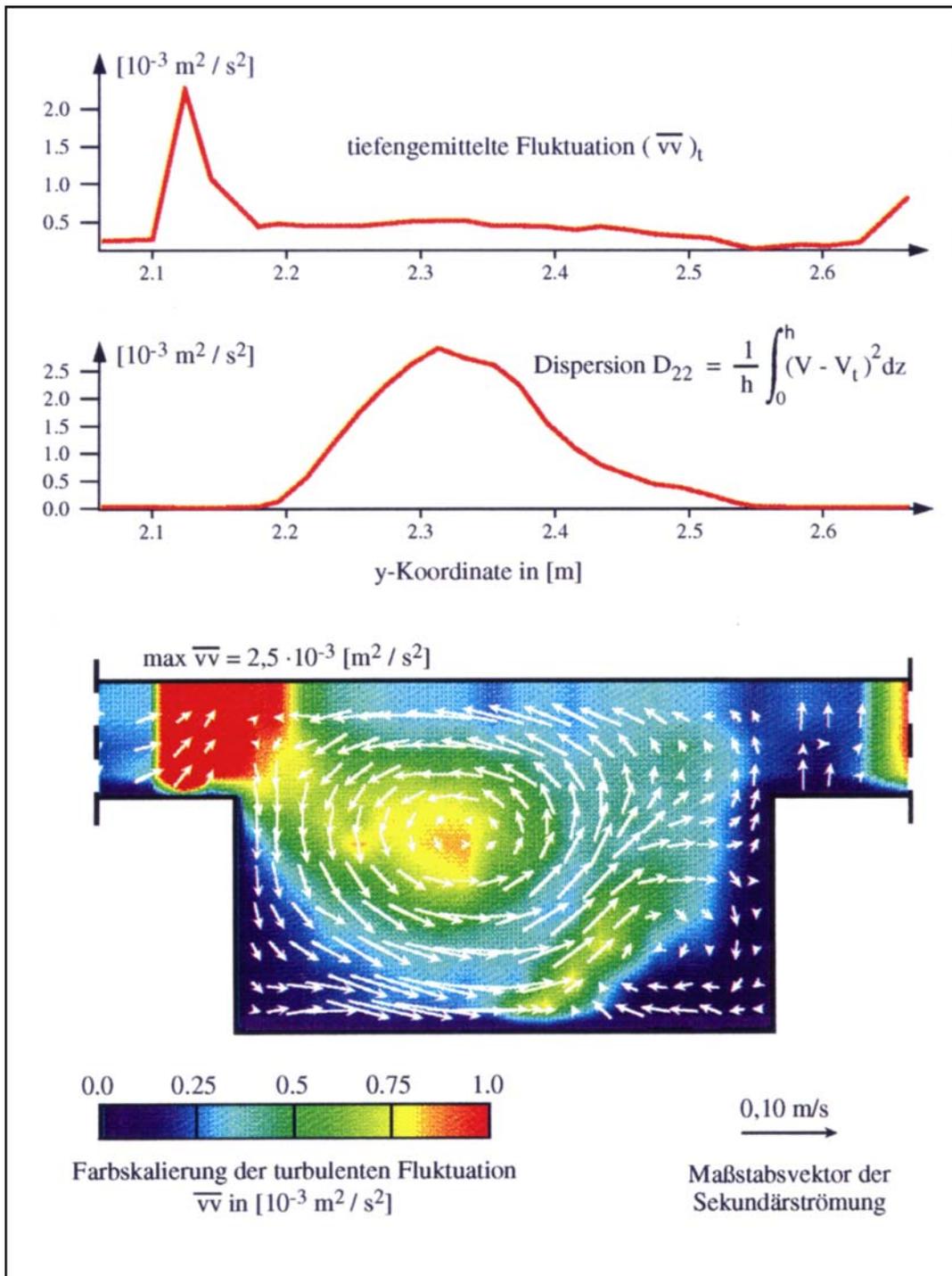


Abb. 4.21: Zusammenhang Dispersion, Sekundärströmung und Turbulenz

## 4.2 Wurmmodell

Die Wurm entspringt im Stadtgebiet von Aachen und mündet nach einer Fließstrecke von ca. 60 km bei Heinsberg in die Rur. Auf einer naturbelassenen Strecke mit stark mäandrierendem Verlauf im Grenzgebiet zwischen der Bundesrepublik und den Niederlanden hat sich der Bachlauf bis zu 5 m tief in den anstehenden Lösbo-den eingegraben. In den Jahren 1981/1982 wurde dieser Bereich im Rahmen eines Gutachtens am Institut für Wasserbau in Aachen in einem physikalischen Modell im Maßstab 1:30 nachgebildet (s. Abb. 4.22). Gegenstand der Untersuchungen war damals die Überprüfung einer Konzeption zur Fixierung des natürlichen Verlaufs der Wurm.

Der obere Abschnitt des Wurmmodells mit einer Modelllänge von ca. 14 m befindet sich noch heute im Versuchslaboratorium des Instituts und konnte für Verifikations-rechnungen des vorstehend beschriebenen numerischen Modells genutzt werden. Zu diesem Zweck wurde das Modell in seiner Topographie meßtechnisch aufge-nommen und die aktuellen Rauheitsverhältnisse kartiert. An ausgewählten Quer-schnitten erfolgten dann Strömungsmessungen bei zwei unterschiedlichen Abflüs-sen.

Die Vermessung der Topographie erfolgte mit den üblichen geodätischen Meßgerä-ten Theodolit und Nivellier sowie Stechpegel und Maßband. Zunächst wurde ein dichtes Netz von insgesamt 20 Festpunkten mit Theodolit und Nivellier eingemes-sen und im Modell markiert. Anschließend erfolgte die Aufnahme der Geländegeo-metrie in Querprofilen. Anfangs- und Endpunkt der Querprofile wurden dabei auf die Verbindungslinien zwischen Festpunkten gelegt und konnten daher mit gerin-gem meßtechnischen Aufwand über eine Streckenmessung in das Festpunktnetz eingerechnet werden. Die Vermessung der Querprofile erfolgte wiederum mit dem Nivellier, wobei die Lage der einzelnen Punkte als relativer Abstand zum jeweiligen Profilanfangspunkt festgehalten wurde.

Abbildung 4.23 gibt eine Übersicht des Festpunktnetzes und aller aufgemessenen Querprofile. In den 12 Profilen mit roter Verbindungslinie wurden in einem zweiten Arbeitsgang die Wasserspiegel mit einem Stechpegel und die horizontalen Fließge-schwindigkeiten mit einer magnetisch-induktiven Strömungssonde erfaßt. Die Strömungsmessungen erfolgten bei zwei Abflüssen, die nach dem *Froude'schen Modellgesetz* aus realistischen Naturabflüssen ermittelt wurden:

$$\begin{aligned} Q_{\text{Modell}} &= 6,09 \text{ l/s} && \text{entsprechend} && Q_{\text{Natur}} &= 30 \text{ m}^3/\text{s} \\ Q_{\text{Modell}} &= 12,17 \text{ l/s} && \text{entsprechend} && Q_{\text{Natur}} &= 60 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Diese Abflüsse wurden im Modellzulauf über ein Thomson-Meßwehr eingestellt. Die Nachbildung von Rückstauwirkungen im Modellauslauf über ein dort befindliches Schütz ergab aufgrund des steilen Sohlgefälles keinen Einfluß auf die Strömungs-verhältnisse im untersuchten Modellbereich und konnte daher entfallen.

Aufgrund des Meßvolumens der magnetisch-induktiven Sonde, welches das dreifache des Sondendurchmessers von ca. 1 cm beträgt, mußte ein ausreichender Abstand zur Gewässersohle und zum Wasserspiegel eingehalten werden. Die Strömungsmessungen erfolgten daher immer in der Mitte zwischen Sohle und Wasserspiegel.

Geländeaufnahme und Strömungsmessungen sowie eine erste numerische Simulation mit dem tiefengemittelten Strömungsmodell erfolgten während einer im Rahmen des DFG-Projektes vergebenen Diplomarbeit (FELDHAUS, 1993).



Abb. 4.22: Wurm bei Herzogenrath: Luftaufnahme und Modellansicht in vergleichbarer Perspektive

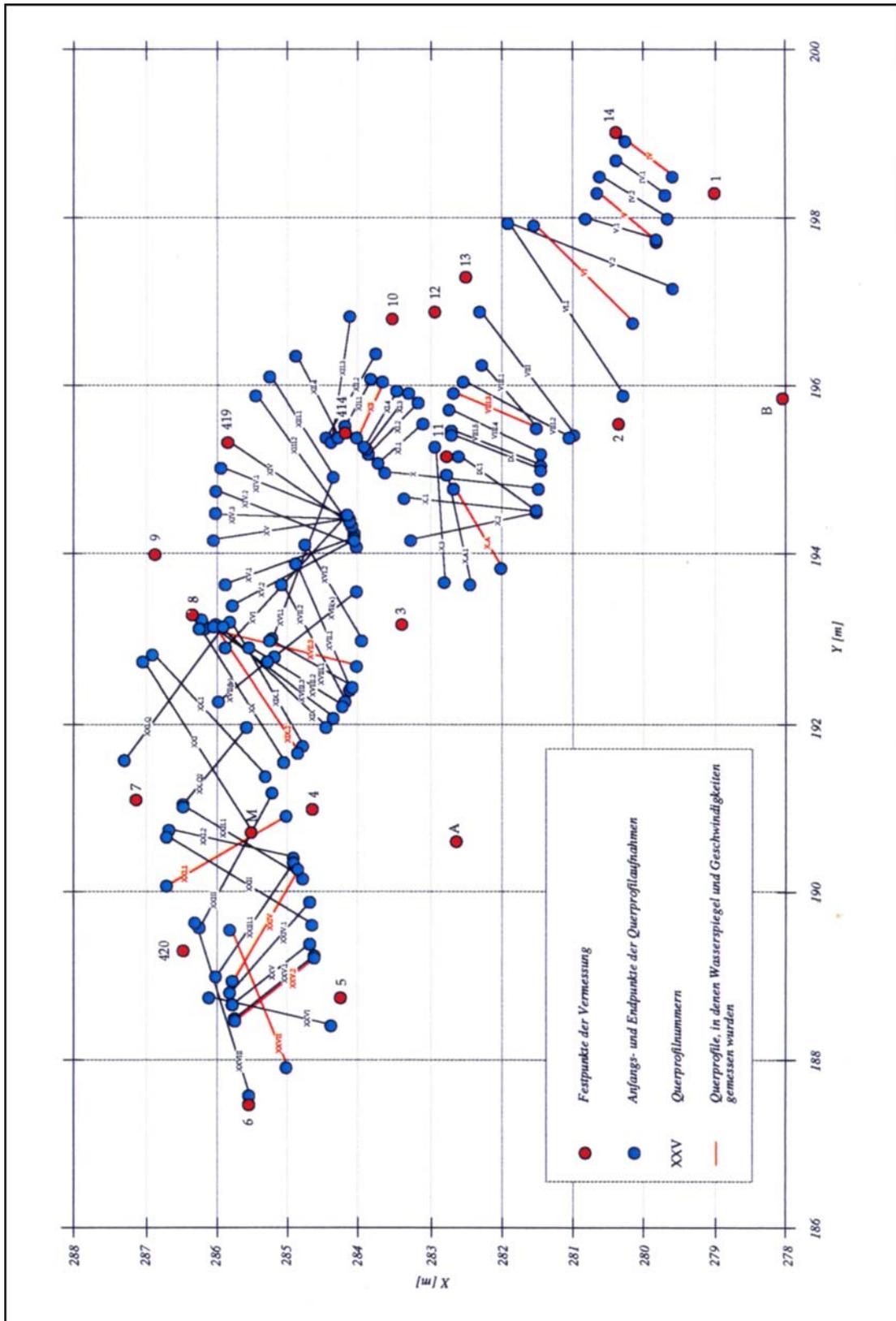


Abb. 4.23: Lage der vermessenen Querprofile

## 5 Anwendung des numerischen Verfahrens

### 5.1 180°-Schleife nach Rozovskii - Rechteckquerschnitt

In einer ersten Verifikationsrechnung mit dem dreidimensionalen numerischen Modell wurde die Strömung in einem rechteckigen Kanal mit einer starken Krümmung von 180° berechnet, die von ROZOVSKII (1957) experimentell untersucht wurde und in der Literatur gut dokumentiert ist. Die "Rozovskii-Schleife" wurde vielfach zur Überprüfung unterschiedlicher Simulationsmodelle, wie zweidimensionalen und dreidimensionalen Finite-Elemente und Finite-Differenzen-Programmen, eingesetzt (z.B.: LESCHZINER und RODI, 1979; KING, 1988; WENKA, 1992; AMMER, 1993). Sie ermöglicht somit eine Einordnung der Leistungsfähigkeit des entwickelten Programmsystems.

Aufgrund der einfachen Geometrie und der relativ geringen Komplexität der Strömung läßt sich die Rozovskii-Schleife mit einer geringen Netzfeinheit und einem entsprechend geringen numerischen Aufwand berechnen. Trotz der einfachen Strömungsverhältnisse müssen von dem numerischen Modell wesentliche Charakteristika natürlicher Strömungen, wie die freie Oberfläche und Primär- sowie Sekundärströmungen, nachgebildet werden. Sekundärströmungen werden in der Rozovskii-Schleife durch Fliehkräfte in der Krümmung verursacht und sind nach den experimentellen Untersuchungen sehr stark ausgeprägt; die Quergeschwindigkeit beträgt lokal bis zu 50 % der Längsgeschwindigkeit.

Abbildung 5.1 gibt die geometrischen Abmessungen des von Rozovskii untersuchten Gerinnes wieder. Dargestellt ist außerdem die Lage von zwei Querschnitten, die zur Beurteilung der Sekundärströmungen verwendet wurden sowie der Simulationsbereich (schraffiert). Entsprechend den bereits von LESCHZINER und RODI (1979) bzw. KING (1987) durchgeführten Simulationen liegen der numerischen Berechnung folgende Randbedingungen zugrunde:

#### **Einlaufquerschnitt** (Dirichlet'sche Randbedingung)

Vorgabe eines Geschwindigkeitsprofils nach dem 1/7-Potenzgesetz (vgl. Gl. 3.31 und 3.32) mit  $q = 0,015 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$  im mittleren Gerinnebereich und  $q = 0,01 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$  an den seitlichen Rändern. Der Durchfluß wurde damit auf 12,3 l/s eingestellt. Vorgabe der Turbulenzgrößen  $k$  und  $\varepsilon$  nach den algebraischen Ansätzen aus Kapitel 2.5.2.1 (vgl. Gl. 2.42 bis 2.46).

#### **Auslaufquerschnitt** (Neumann'sche Randbedingung)

Vorgabe einer konstanten Fließtiefe von  $H = 5,8 \text{ cm}$ .

#### **Sohl- und Wandflächen** (Neumann'sche und Dirichlet'sche Randbedingung)

Die Wandgrenzschicht wurde mit dem logarithmischen Wandgesetz überbrückt (Neumann) und ein hydraulisch glattes Verhalten vorausgesetzt. Der wandnächste Punkt wurde global auf einen Abstand von 7,5 mm festgelegt, womit sich ein mittlerer dimensionsloser Wandabstand von  $x_n^+ = 98$  einstellte. Die Fließgeschwindigkeit in Normalenrichtung ist identisch Null (Dirichlet). Die turbulenten Größen  $k$  und  $\varepsilon$  wurden auf der Wand auf einen festen Wert (Dirichlet) in Abhängigkeit vom Wandabstand gesetzt (Gl. 3.36 und 3.37).

#### freie Oberfläche (Neumann'sche und Dirichlet'sche Randbedingung)

Die freie Oberfläche ist ein nicht durchströmter Rand, der als Symmetrieebene behandelt wird. Das heißt, die Normalkomponente der Fließgeschwindigkeit und alle Gradienten in Normalenrichtung sind identisch Null.

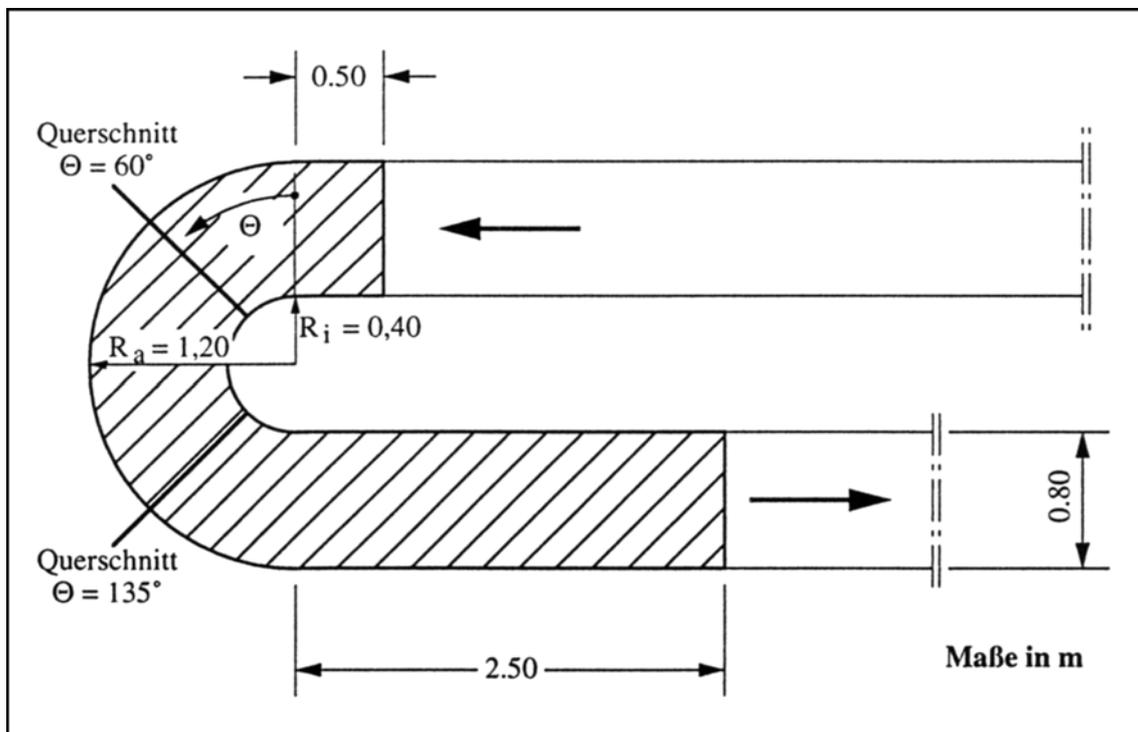


Abb. 5.1: Rechteckgerinne mit 180° Krümmung nach ROZOVSKII (1957)

Der Berechnung liegt das in Abbildung 5.2 in Aufsicht und im Schnitt dargestellte Netz zugrunde (1200 Elemente und 6227 Knotenpunkte), das sich während der Simulationsrechnungen mit den algebraischen Wirbelviskositätsmodellen als ausreichend fein herausstellte. Das heißt, der iterative Lösungsprozeß verhielt sich stabil und die Nachbildung der wesentlichen Strömungseigenschaften konnte erfolgreich abgeschlossen werden.

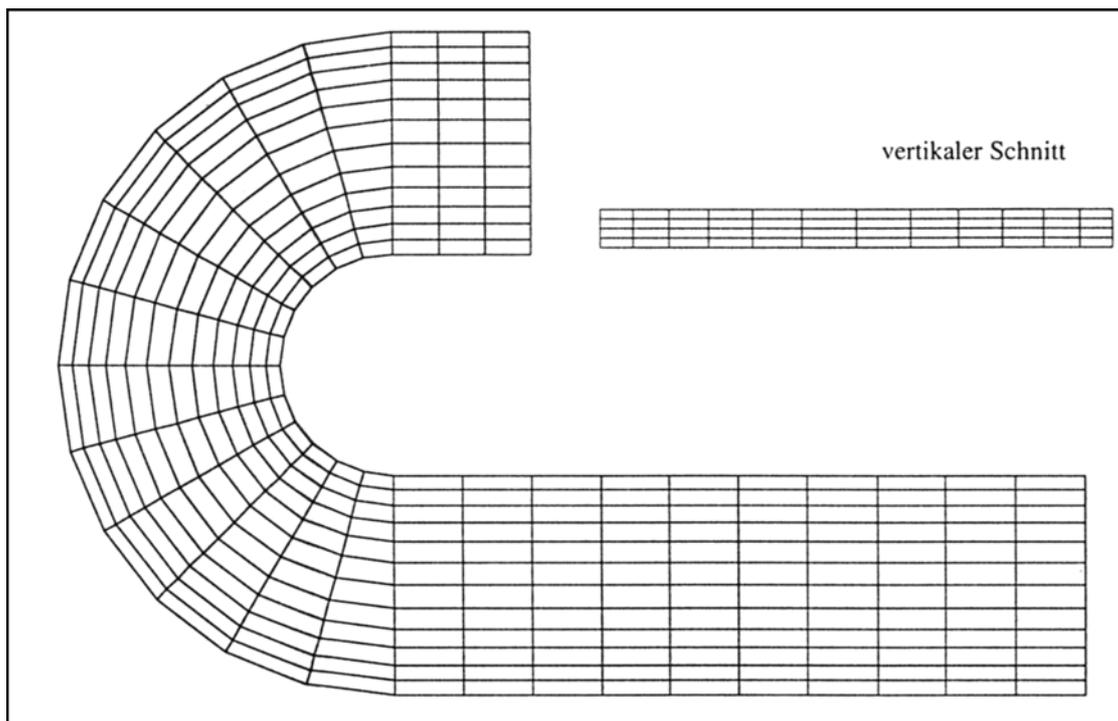


Abb. 5.2: FE-Netz in Aufsicht und im Schnitt; Rechteckgerinne mit  $180^\circ$  Krümmung

Der Wandabstand für das logarithmische Wandgesetz war ein kritischer Parameter. Er beeinflusste sowohl die Konvergenzgeschwindigkeit des iterativen Lösungsverfahrens, die mit einem kleiner werdenden Wandabstand drastisch abnahm, als auch die Größe der berechneten Quergeschwindigkeit erheblich. Zum Beispiel erhöhte sich die Quergeschwindigkeit lokal an Sohl- sowie an Oberflächenpunkten durch eine Verkleinerung des Wandabstandes von 1,0 mm auf 0,75 mm um 10 bis 15 %. Der dimensionslose Wandabstand reduzierte sich entsprechend von 128 auf einen Wert von 97,5. Die Ursache für den großen Einfluß des Wandabstandes ist indirekt in der Berechnung der Wirbelviskosität auf festen Wänden zu sehen (Gl. 3.36 und 3.37). Diese nimmt proportional mit kleiner werdendem Wandabstand ab.

Nach den Berechnungen mit dem algebraischen Wirbelviskositätsmodell sollten die  $k$ - $\varepsilon$ -Gleichungen zur Turbulenzmodellierung verwendet werden. Leider erwies sich hierbei wiederum der Wandabstand als äußerst kritischer Parameter. Die Lösung der Turbulenzgleichungen blieb nur bis  $x_n^+ > 1,2$  mm für das in Abbildung 5.2 dargestellte Netz stabil und liegt damit noch außerhalb des Gültigkeitsbereiches des logarithmischen Wandgesetzes. Eine Begutachtung der Ergebnisse zeigte aus diesem Grund eine starke Unterschätzung der lateralen Fließgeschwindigkeit. Die Berechnungen mit dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell haben den Charakter von Zwischenergebnissen. Sie werden an dieser Stelle trotzdem aufgeführt, da sich die Verteilung der turbulenten Größen erheblich von den Ergebnissen mit den algebraischen Wirbelviskositätsmodellen unterscheidet.

Abbildung 5.3 stellt die berechneten Wasserspiegel entlang des Innen- und Außenufers im Bereich der Gerinnekrümmung für die Berechnung mit dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell und

dem algebraischen Wirbelviskositätsmodell den experimentellen Daten von Rozovskii und der Finite-Differenzen-Simulation von LESCHZINER und RODI (1979) gegenüber. Eine Isoliniendarstellung der berechneten Wasserspiegellagen ist mit Abbildung 5.4 gegeben. Mit Ausnahme der Wasserspiegel entlang des Innenufers stimmt die Vorhersage des Modells gut mit den Meßdaten von Rozovskii überein.

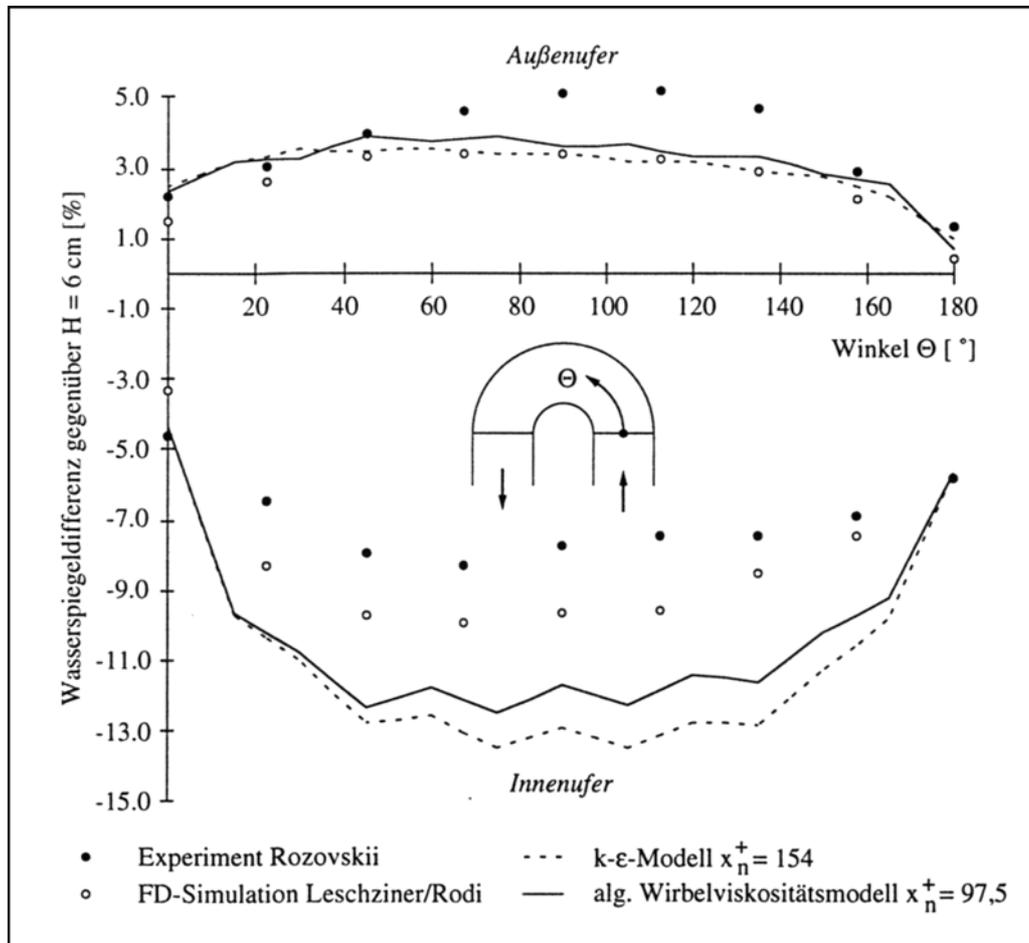


Abb. 5.3: Wasserpegelverlauf am Innen- und Außenufer - Rozovskii-Schleife

Im Bereich des Innenufers liegen die berechneten Wasserspiegel unter Verwendung des algebraischen Modells etwas näher an den experimentellen Daten als bei dem k- $\epsilon$ -Modell. Diese Differenzen resultieren vorwiegend aus den unterschiedlichen Wandabständen in beiden Ansätzen. Ähnlich große Abweichungen wurden auch von KING (1987) und AMMER (1993) bei ihren dreidimensionalen Simulationsrechnungen beobachtet, die ihre Ergebnisse mit einem vergleichbaren Strömungsmodell unter Ansatz einer konstanten Wirbelviskosität erzielten. An dieser Stelle zeigt die Simulation von LESCHZINER und RODI (1979) eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Ihr Finite-Differenzen-Modell unterscheidet sich in einigen Punkten von dem hier verwendeten Finite-Elemente-Modell. Es modelliert die Strömung vollständig dreidimensional unter Berücksichtigung des vertikalen Impulses und unter Verwendung eines k- $\epsilon$ -Turbulenzmodells. Die freie Strömungs-

fläche wird jedoch nicht nachgebildet, sondern mit einem sogenannten "rigid lid"-Ansatz angenähert. Folglich ergibt sich der Wasserspiegelverlauf bei LESCHZINER und RODI aus den Druckdifferenzen an der horizontalen Netzoberfläche.

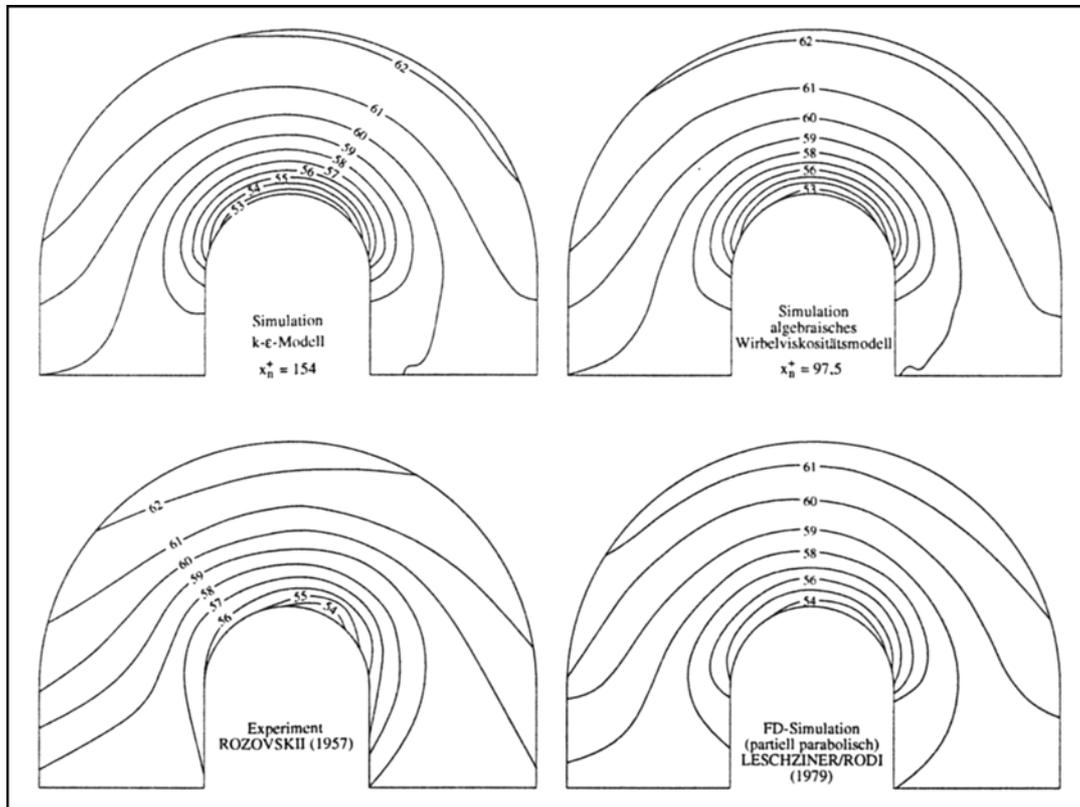


Abb. 5.4: Isolinien des Wasserspiegels - Rozovskii-Schleife

Die genaue Ursache für die Abweichungen des Wasserspiegels entlang des Innenfres kann zu diesem Zeitpunkt nicht abschließend geklärt werden. Der Vergleich zu den Ergebnissen von LESCHZINER und RODI legt den Schluß nahe, daß eine Strömungsmodellierung unter Verwendung der  $k$ - $\epsilon$ -Gleichungen bei einem kleineren Wandabstand eine deutliche Verbesserung zur Folge hätte. Hierzu wird jedoch eine wesentlich feinere Diskretisierung des Strömungsgebietes erforderlich. Diese Untersuchungen konnten im Rahmen dieses Forschungsprojektes nicht mehr durchgeführt werden und müssen auf einen späteren Zeitpunkt verschoben werden.

Im folgenden sollen die wesentlich interessanteren Eigenschaften des dreidimensionalen Strömungsmodells zur Nachbildung der Fließgeschwindigkeit in longitudinaler und lateraler Richtung genauer analysiert werden. Hierzu erfolgt in Abbildung 5.5 eine qualitative Gegenüberstellung der berechneten Sekundärströmung mit den Ergebnissen von KING (1988) und LESCHZINER und RODI (1979). Das eigene Modell zeigt eine gute qualitative Übereinstimmung mit den Ergebnissen von KING: Das Zentrum des Wirbels liegt etwas unterhalb der halben Querschnittshöhe; die

Fließgeschwindigkeit an der freien Oberfläche ist kleiner als an der Sohle. Die Simulation von LESCHZINER und RODI unterscheidet sich vermutlich aufgrund des "rigid lid"-Ansatzes geringfügig von diesem qualitativen Bild.

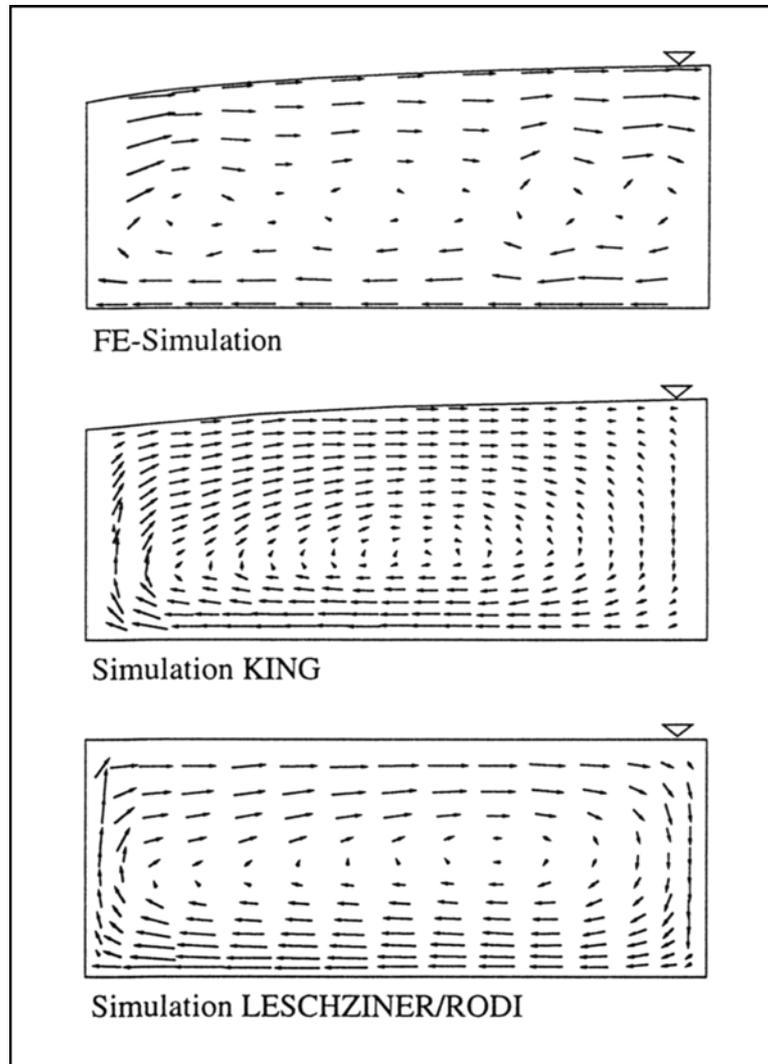


Abb. 5.5: Sekundärströmungen in Querschnitt  $\theta = 60^\circ$  - Rozovskii-Schleife

In Abbildung 5.6 sind die lateralen und in Abbildung 5.7 die longitudinalen Fließgeschwindigkeiten für den Querschnitt bei einem Winkel von  $\theta = 135^\circ$  (vgl. Abb. 5.1) dargestellt. Gegenüber den Ergebnissen von LESCHZINER und RODI (1979) ist hier insgesamt eine etwas bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten von Rozovskii festzustellen. Insgesamt zeigt sich eine ähnliche Tendenz wie bei den Wasserspiegellagen, die Übereinstimmung ist im Bereich des Außenufers sehr gut, sie nimmt jedoch in Richtung auf das Innenufer deutlich ab. Die Fließgeschwindigkeit an der freien Oberfläche wird zum Teil sehr genau nachgebildet; die Höhe des Punktes mit  $U_{\text{quer}} = 0,0 \text{ m/s}$ , der die Lage des Zentrums der Spiralströmung präsentierte, stimmt gut mit den Meßdaten überein. Im sohnahen Bereich wird der Rückgang der Fließgeschwindigkeit nicht so deutlich nachgebildet. Auch hier läßt

die Verwendung des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells bei weiterer Reduktion des Wandabstandes bessere Ergebnisse erwarten.

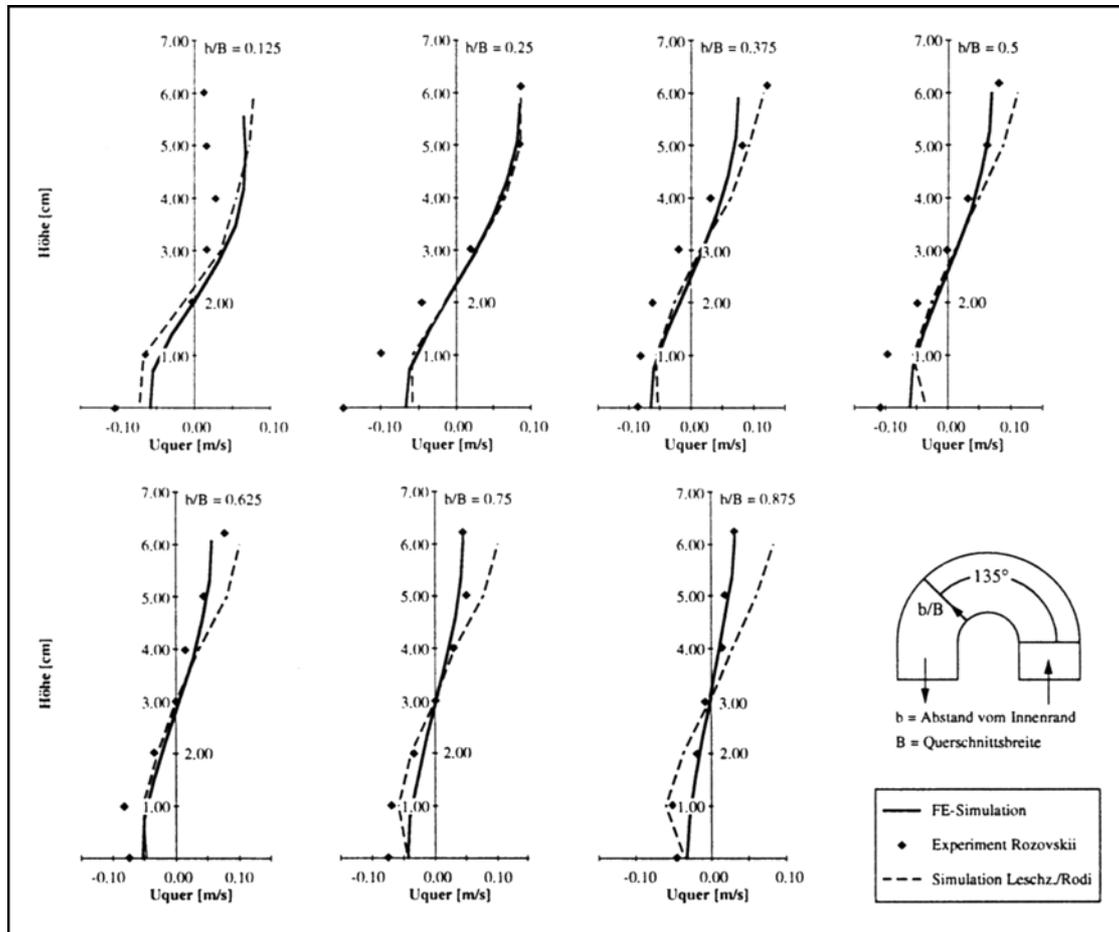


Abb. 5.6: Quergeschwindigkeit in Querschnitt  $\theta = 135^\circ$  - Rozovskii-Schleife

Eine Darstellung der turbulenten Größen  $k$ ,  $\varepsilon$  und  $v_t$  ist den Abbildungen 5.8 und 5.9 zu entnehmen. Dargestellt sind diese Werte an der freien Oberfläche und in einem Querschnitt ( $\theta = 135^\circ$ ) für die Simulation mit dem algebraischen Wirbelviskositätsmodell (Abb. 5.8) und mit dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell (Abb. 5.9). Sehr schön ist hier der grundsätzliche Unterschied zwischen beiden Turbulenzansätzen zu erkennen. Während sich die maximalen Werte bei dem algebraischen Modell auf den Bereich hoher Sohlschubspannungen beschränken (Innenufer und Verlagerung der Hauptströmungsgeschwindigkeit zum rechten Ufer im abströmenden geraden Kanalstück), wird von dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell der Transport der turbulenten Größen mit der Hauptströmung nachgebildet. Dies führt zu einer Verlagerung hoher Turbulenzgrade in den Bereich hinter die Gerinnekrümmung mit einer Tendenz zur Gerinnemitte. Die hohen Fließgeschwindigkeiten in lateraler Richtung machen sich hier deutlich bemerkbar. Der Einfluß dieses Transportprozesses auf die Größe der berechneten Fließgeschwindigkeit ist nicht unerheblich. Auch dies bestätigt die grundsätzlichen Vorteile, die von einer Turbulenzmodellierung mit dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell zu erwarten sind.

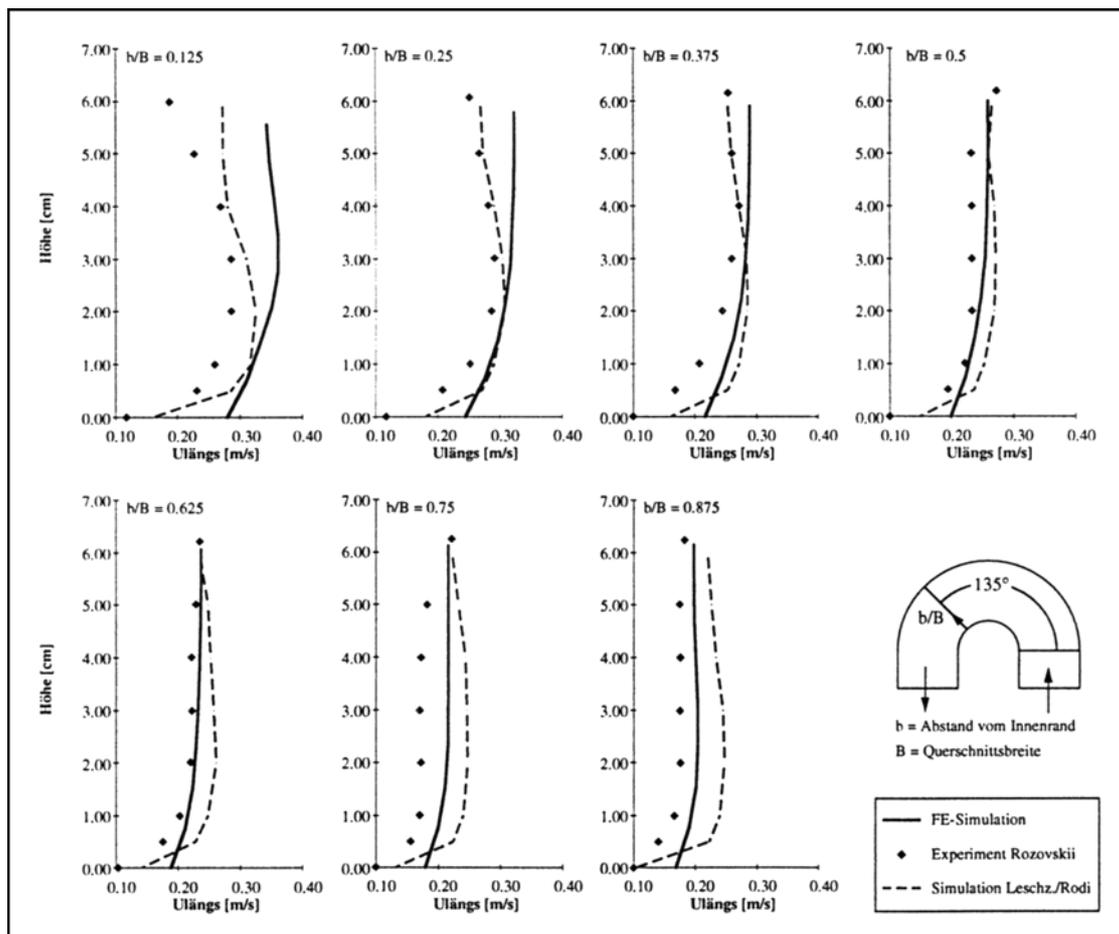


Abb. 5.7: Längsgeschwindigkeit in Querschnitt  $\theta = 135^\circ$  - Rozovskii-Schleife

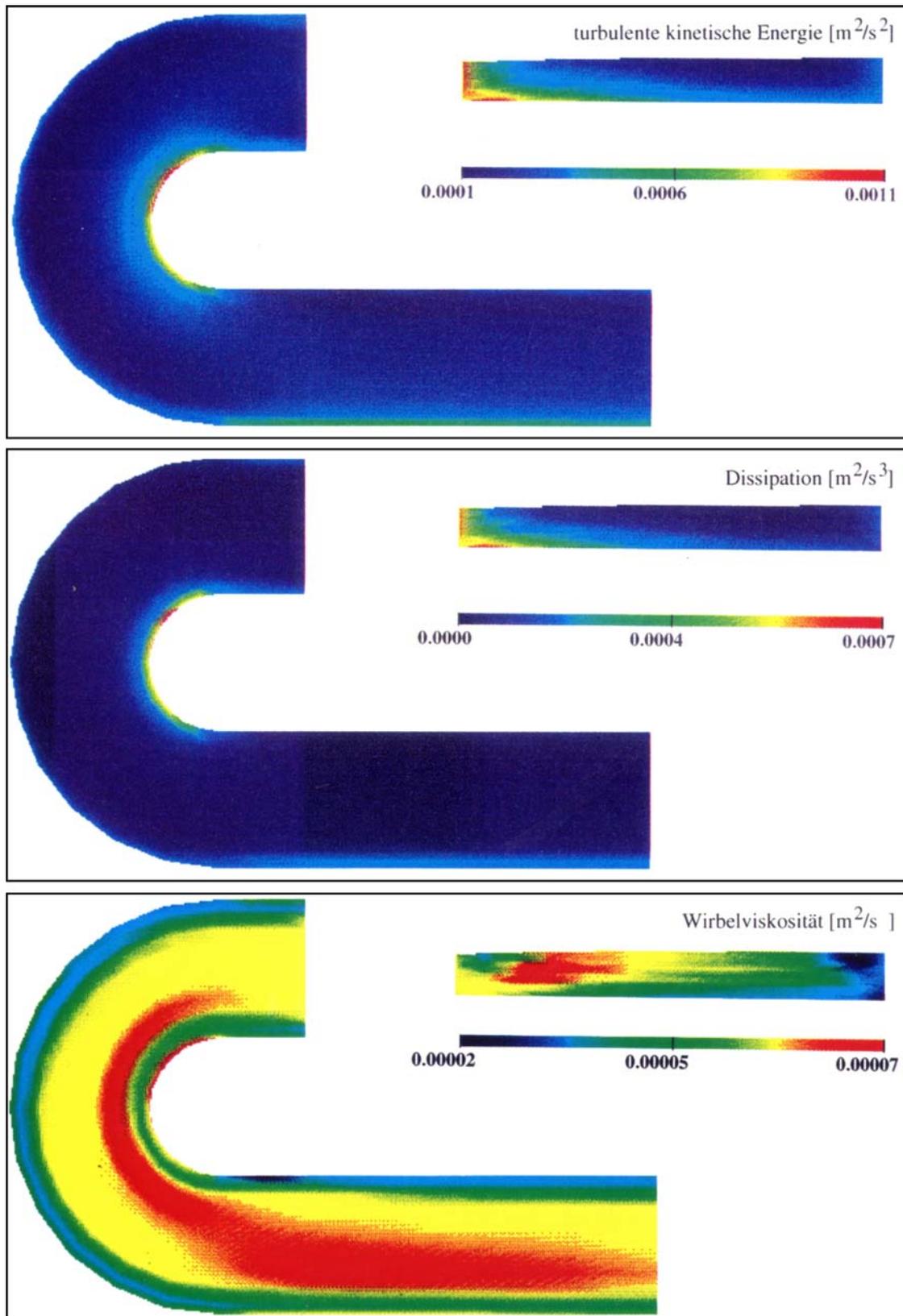


Abb. 5.8: Turbulente Größen  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\nu_t$ ; algebraisches Modell - Rozovskii-Schleife

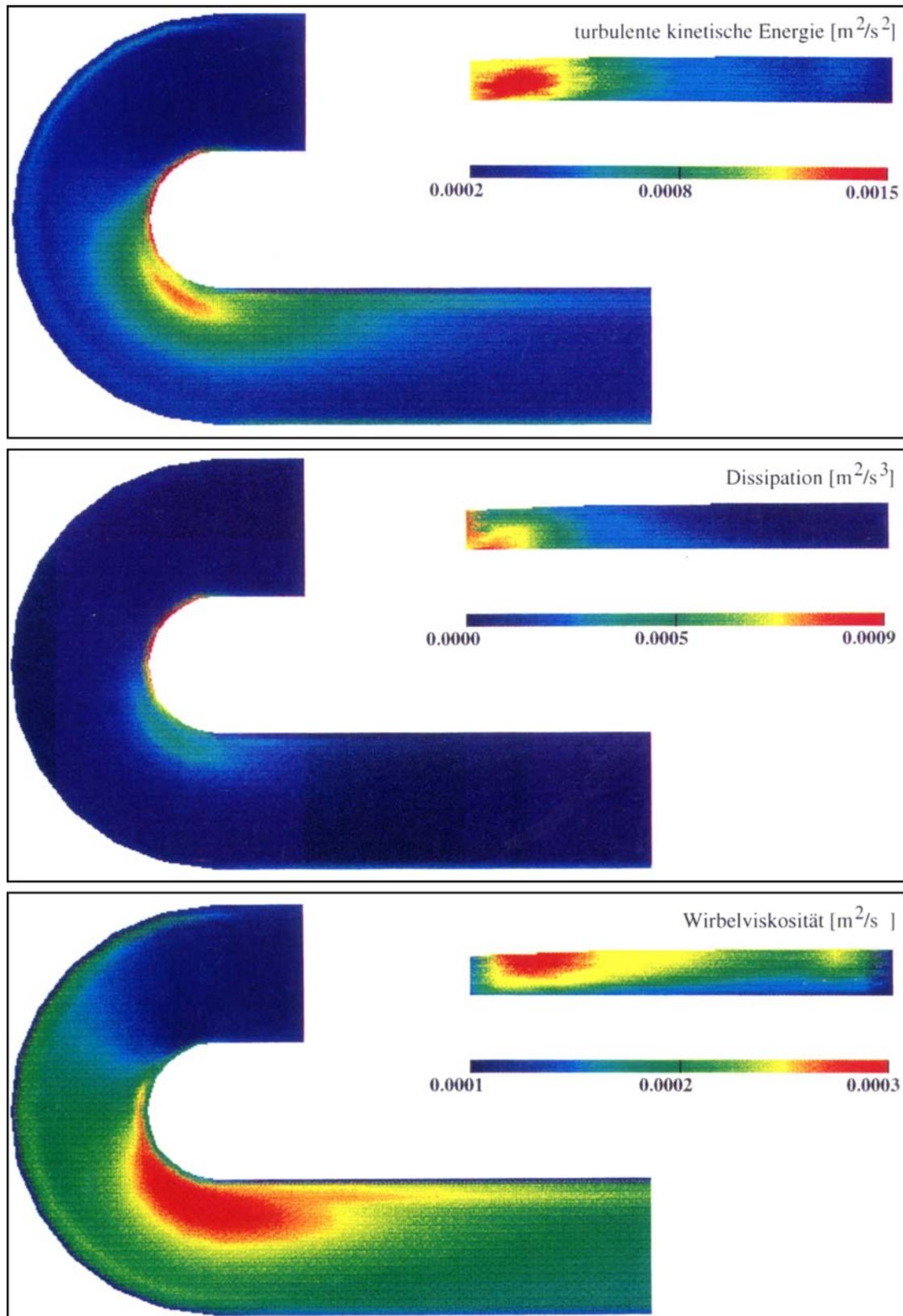


Abb. 5.9: Turbulente Größen  $k$ ,  $\varepsilon$ ,  $\nu_t$ ;  $k$ - $\varepsilon$ -Modell - Rozovskii-Schleife

## 5.2 Mäandermodell

Das in Kapitel 4.1 ausführlich beschriebene Mäandermodell ist aufgrund der eigenen experimentellen Untersuchungen zur Verifikation der entwickelten numerischen Modelle prädestiniert. Der Vorteil experimentelle Daten im direkten Zugriff zu haben ist offensichtlich. Die Ergebnisse der physikalischen Modelluntersuchung können direkt in die Entwicklung der numerischen Modelle einfließen und Unzulänglichkeiten in den mathematischen Modellansätzen aufzeigen. Die Alternative, Daten aus Fachpublikationen abzugreifen, ist zeitraubend und mit großen Ungenauigkeiten verbunden.

Die Simulation der Mäanderströmung erfolgte mit beiden numerischen Modellen, zweidimensional-tiefengemittelt unter Verwendung des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells und dreidimensional mit einem algebraischen Wirbelviskositätsmodell. Die Berechnungen basieren auf dem Versuch mit der Nummer I05 B06 H130 (vgl. Abb. 4.5).

### 5.2.1 Wahl der Randbedingungen

Die Randbedingungen sind für beide numerischen Modelle ähnlich und sollen daher an dieser Stelle zusammenfassend beschrieben werden. Sie ergeben sich hinsichtlich der Zulaufwassermenge und der Fließtiefe im Auslauf aus den experimentellen Untersuchungen.

#### Zulaufquerschnitt (Dirichlet'sche Randbedingung)

Vorgabe eines Geschwindigkeitsprofils entsprechend dem experimentellen Zufluß (s. Abb. 5.10). Die Aufteilung erfolgte abschnittsweise für die beiden Vorländer und das Hauptgerinne mit jeweils konstanten Werten.

Für die dreidimensionale Simulation wurde das vertikale Geschwindigkeitsprofil mit dem  $1/7$ -Potenzgesetz (Gl. 3.31) festgelegt.

Die turbulenten Größen  $k$  und  $\varepsilon$  wurden mit den algebraischen Ansätzen aus Kapitel 2.5.2.1. bzw. 2.5.2.2 festgelegt.

#### Auslaufquerschnitt (Neumann'sche Randbedingung)

Vorgabe eines konstanten Wasserspiegels von  $H = 13,0$  cm über der Gerinnesohle des Flußschlauches.

#### Sohl- und Seitenflächen (Neumann'sche und Dirichlet'sche Randbedingung)

In der dreidimensionalen Simulation wurde die Grenzschicht mit dem logarithmischen Wandgesetz überbrückt (Neumann) und ein hydraulisch glattes Verhalten vorausgesetzt ( $k_S = 0,003$  mm). Der wandnächste Punkt wurde global auf einen Abstand von 8 mm festgelegt. Hieraus ergab sich ein mittlerer dimensionsloser Wandabstand von  $x_n^+ = 93,7$ . Die Fließgeschwindigkeit in Normalenrichtung ist identisch Null (Dirichlet). Die turbulenten Größen wur-

den am wandnächsten Punkt entsprechend Gleichung 3.36 bzw. 3.37 festgelegt (Dirichlet).

In der zweidimensional-tiefengemittelten Simulation wird nur die seitliche Begrenzung als Randbedingung in der mathematischen Formulierung berücksichtigt. Die Sohlschubspannung wird aufgrund der vertikalen Integration der Strömungsgleichungen zu einer äußeren Kraft. Sie wurde aus den tiefengemittelten Fließgeschwindigkeiten mit dem Widerstandsgesetz von *Colebrook/White* (Gl. 2.18) ermittelt. Die seitliche Berandung wurde vereinfachend als spannungsfrei ("slip-flow"-Bedingung) angenommen. Die Fließgeschwindigkeit in Normalenrichtung ist wiederum identisch Null (Dirichlet). Die turbulenten Größen wurden mit den algebraischen Ansätzen nach Gleichung 2.53 bzw. 2.54 festgelegt (Dirichlet).

Die Berücksichtigung der Rauheitselemente im Vorlandbereich erfolgte mit dem modifizierten Verfahren für durchströmten Bewuchs nach LINDNER (1982) und PASCHE (1984). Auf diesem Weg ergibt sich sowohl in der zweidimensional-tiefengemittelten als auch in der dreidimensionalen Modellierung eine erhöhte Sohlschubspannung.

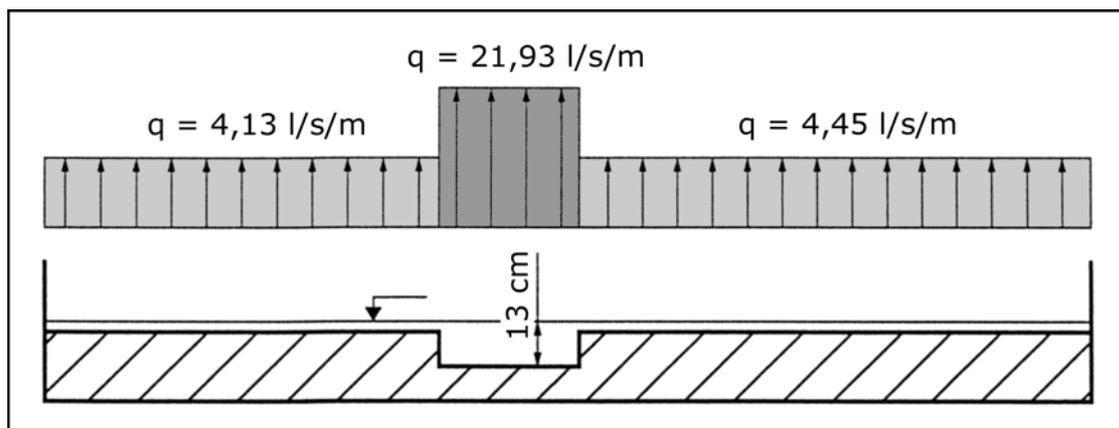


Abb. 5.10: Zulaufrandbedingung für das Mäandermodell

### Freie Oberfläche

Die freie Oberfläche ist in der dreidimensionalen Simulation (stationärer Fall) ein nicht durchströmter Rand. Folglich ist die Normalkomponente der Fließgeschwindigkeit identisch Null (Dirichlet). Da keine Windschubspannungen zu berücksichtigen sind, ist der Rand spannungsfrei und wird für alle Größen (einschließlich  $k$  und  $\varepsilon$ ) als Symmetrieebene betrachtet.

In der zweidimensionalen Simulation entfällt die Randbedingung für die freie Oberfläche aufgrund der vertikalen Integration.

## 5.2.2 Zweidimensional-tiefengemittelte Simulation

Durch die tiefengemittelte Betrachtung wird eine besondere Behandlung des vertikalen Ufers zwischen Flußschlauch und angrenzendem Vorland erforderlich, da einem Knotenpunkt des zweidimensionalen Finite-Elemente-Netzes nur eine einzige Sohlhöhe zugeordnet werden kann. Die Annäherung in Form einer sehr steilen Böschung (5 : 2) verlangt in diesem Bereich eine besonders feine Diskretisierung. Das den Berechnungen zugrundeliegende FE-Netz ist in Abbildung 5.11 dargestellt.

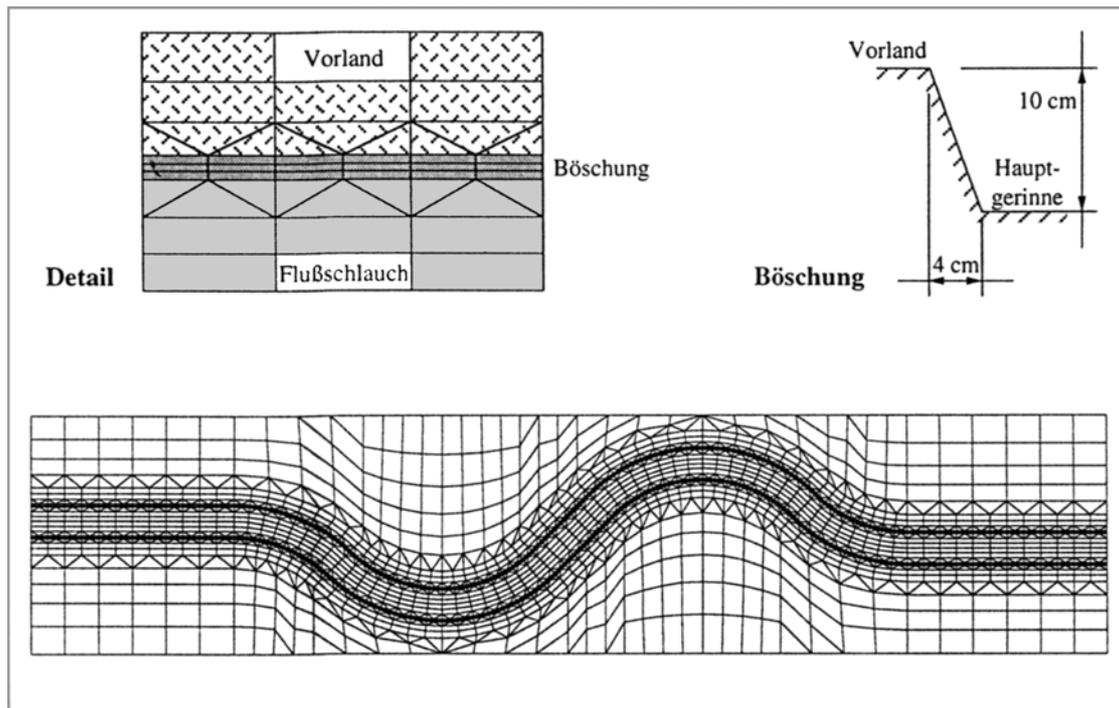


Abb. 5.11: FE-Netz für die zweidimensional-tiefengemittelte Simulation - Mäander

Abbildung 5.12 gibt die Einteilung des Mäandermodells in vier verschiedene Materialzonen, wie sie zur Vorgabe unterschiedlicher Rauheitsverhältnisse notwendig war bzw. zur Abstufung unterschiedlicher Turbulenzparameter sinnvoll erschien. Hierzu sei angemerkt, daß mit steigender Anzahl unterschiedlicher Materialzonen der Aufwand zur Kalibrierung des numerischen Modells unverhältnismäßig ansteigt. Zweckmäßig erscheint daher die Wahl der Materialzonen auf Bereiche unterschiedlicher Sohlrauheit, unterschiedlicher Fließtiefe sowie hoher Geschwindigkeitsgradienten zu beschränken. Letztere sind im Übergangsbereich zwischen Flußschlauch und Vorland zu erwarten.

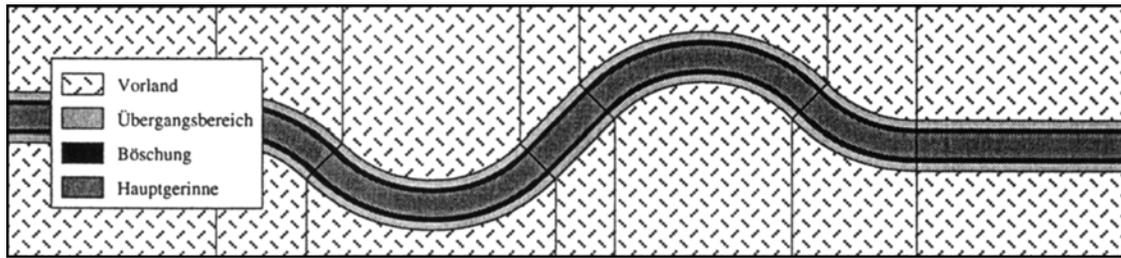


Abb. 5.12: Materialzonen im Mäander

Die Simulationsrechnungen erfolgten mit verschiedenen Ansätzen zur Modellierung der Turbulenz. Der generelle Startpunkt ist die Berechnung der Fließtiefen und des horizontalen Geschwindigkeitsfeldes auf der Basis einer bereichsweise konstanten Wirbelviskosität. In der zweiten Stufe erfolgt die Verwendung algebraischer Wirbelviskositätsmodelle, die ein initialisiertes Strömungsfeld voraussetzen. Mit dem algebraischen Wirbelviskositätsmodell sind nun die turbulenten Größen initialisiert, so daß sich in der dritten Stufe die abwechselnde Lösung der  $k$ - $\epsilon$ - und Strömungsgleichungen anschließen kann.

Im folgenden werden die Berechnungsergebnisse der ersten Stufe mit einer kalibrierten, bereichsweise konstanten Wirbelviskosität und der dritten Stufe ohne Kalibrierung sowie mit einer Kalibrierung der dimensionslosen Diffusivität  $e^*$  (Gl. 2.55 und 2.66) diskutiert. Die jeweils zugrundegelegten Parameter sind in Tabelle 5.13 zusammengestellt.

Tab. 5.13: Materialparameter für die zweidimensional-tiefengemittelte Simulation - Mäander

Modell	Materialzone	Parameter				
		$k_s$ [mm]	$d_p$ [mm]	$a_p$ [mm]	$\nu_{t, \text{const.}}$ [m <sup>2</sup> /s]	$e^*$
konstante Wirbelviskosität	Vorland	0,003	6	140	0,0200	-
	Übergang	0,003	6	140	0,0200	-
	Böschung	0,003	0	0	0,0005	-
	Hauptgerinne	0,003	0	0	0,0300	-
k- $\epsilon$ -Modell	Vorland	0,003	6	140	-	0,6
	Übergang	0,003	6	140	-	0,6
	Böschung	0,003	0	0	-	0,6
	Hauptgerinne	0,003	0	0	-	0,6
k- $\epsilon$ -Modell kalibriert	Vorland	0,003	6	140	-	0,5
	Übergang	0,003	6	140	-	5,0
	Böschung	0,003	0	0	-	0,12
	Hauptgerinne	0,003	0	0	-	25,0

Die berechneten Fließgeschwindigkeiten unter Ansatz einer bereichsweise konstanten und kalibrierten Wirbelviskosität sind für die drei Querschnitte Q07, Q12 und Q16 in Abbildung 5.14 gegeben. Die resultierende Fließgeschwindigkeit zeigt in den drei Bereichen, linkes Vorland, Hauptgerinne und rechtes Vorland, jeweils im Mittel eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Im Detail wird die Fließgeschwindigkeit jedoch nicht korrekt wiedergegeben; der Anstieg im Hauptge-

rinne in Richtung auf das Innenufer (z.B. rechtes Ufer in Querschnitt 12) sowie der sehr steile Geschwindigkeitsabfall beim Übergang auf das Vorland werden nur sehr unvollkommen nachgebildet. Die Fließgeschwindigkeit im Übergangsbereich Vorland/Hauptgerinne wird leicht überschätzt.

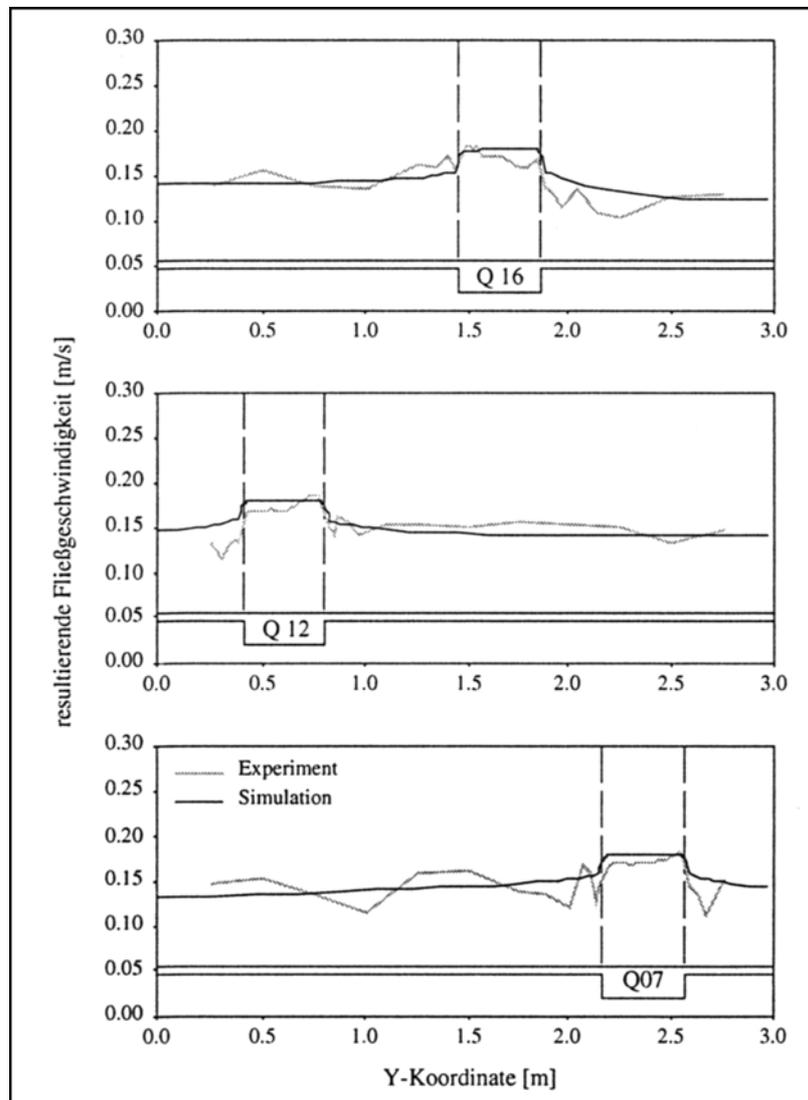


Abb. 5.14: Resultierende Fließgeschwindigkeit;  
 tiefengemittelte Simulation mit konstanter Wirbelvis-  
 kosität; Mäanderströmung; Versuch I05 B06 H130

Es sei hierzu angemerkt, daß die Schwankungen im Geschwindigkeitsprofil der Meßdaten im Vorlandbereich durch einzelne Bewuchselemente verursacht werden. Eine Simulation dieses Phänomens kann von keinem der hier verwendeten Modelle erwartet werden, da die diskreten Rauheits-elemente in ihrem Gesamteinfluß als erhöhte Sohlschubspannung berücksichtigt werden.

Abbildung 5.15 stellt die berechneten Fließgeschwindigkeiten unter Verwendung des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells bei einer konstanten dimensionslosen Diffusivität  $e^*$  sowie die berechnete turbulente kinetische Energie den entsprechenden experimentellen Daten gegenüber. Ein Vergleich der turbulenten kinetischen Energie ist mit grundsätzlichen Schwierigkeiten verbunden, da die Version des  $k$ - $\varepsilon$ -Modell für tiefengemittelte Berechnungen (RASTOGI und RODI, 1978) einen hohen Grad an Empirik beinhaltet. WENKA (1992) führt hierzu aus, daß  $k$  und  $\varepsilon$  strenggenommen keine tiefengemittelten Werte darstellen. Er kommt zu dem Schluß, daß die berechnete Turbulenzenergie in einer zweidimensionalen Strömung immer mit einem Faktor  $\approx 2$  überschätzt wird. Zur Erleichterung einer qualitativen Begutachtung der turbulenten kinetischen Energie wurden die experimentellen Werte in den folgenden Abbildungen um den Faktor 2 überhöht.

Gegenüber dem Ansatz einer konstanten Wirbelviskosität zeigen die mit dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell berechneten Geschwindigkeitsprofile eine ausgeprägte Profilierung. Der Geschwindigkeitsanstieg vom Außen- zum Innenufer des Flußschlauches wird allerdings erheblich überschätzt. Dieser signifikante Fehler führt in den angrenzenden Vorlandbereichen ebenfalls zu einer Überschätzung bzw. Unterschätzung der Fließgeschwindigkeit. Die Ursache hierfür läßt sich direkt auf die Vernachlässigung der dispersiven Terme in den tiefengemittelten Reynoldsgleichungen zurückführen. Diese Terme liegen nach den experimentellen Untersuchungen in der Größenordnung der turbulenten Fluktuationen (s. Kap. 4.1.3.4). Ihre allgemeingültige Berücksichtigung kann derzeit nur von einem dreidimensionalen Strömungsmodell (s. Kap. 5.2.3) geleistet werden.

Da die dreidimensionale Strömungsmodellierung jedoch einen wesentlich höheren numerischen Aufwand erfordert, und in vielen Anwendungsfällen keine direkte Notwendigkeit zur dreidimensionalen Auflösung des Strömungsgebietes besteht, wurde eine Modifikation des tiefengemittelten Modells im Hinblick auf die Turbulenzmodellierung notwendig. Zwar beruhen Dispersion und Turbulenz auf zwei grundverschiedenen Eigenschaften einer Strömung, ihnen ist jedoch gemeinsam, daß ihr Einfluß auf die mittlere Strömung nur indirekt erfaßt werden kann. Eine Anbindung des Dispersionsmodells an das Turbulenzmodell erscheint auch wegen des schwachen Zusammenhangs von Dispersion und turbulenter Fluktuation sinnvoll (vgl. Kap. 4.1.3.4). Hierzu sollen zwei Verfahren aufgezeigt werden, mit denen eine einfache Kalibrierung des numerischen Modells (z.B. mit Naturmeßdaten) möglich ist, um den Einfluß der dispersiven Terme auf die mittlere Strömungsgeschwindigkeit zu berücksichtigen.

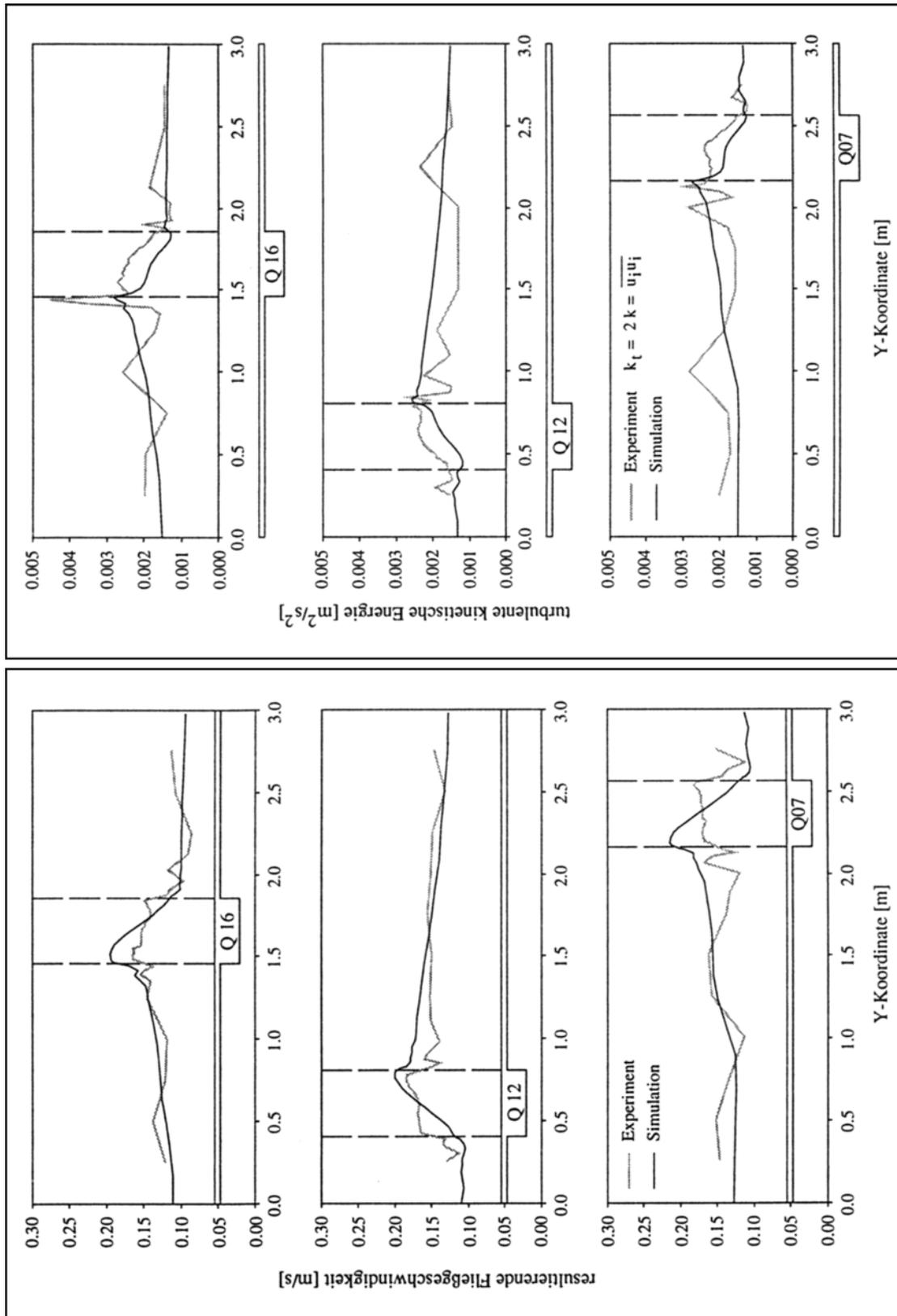


Abb. 5.15: Resultierende Fließgeschwindigkeit und turbulente kinetische Energie; tiefenge-mittelte Simulation mit  $k$ - $\varepsilon$ -Modell ( $e^* = 0,6$ ); Mäanderströmung; Versuch I05 B06 H130

### a) Gemischter Wirbelviskositätsansatz

Die effektive Wirbelviskosität wird in zwei Anteile aufgespalten, die den Einfluß der Turbulenz und der Dispersion getrennt erfassen:

$$\nu_{t,\text{eff}} = \nu_{t,\text{dis}} + \nu_{t,\text{tur}}$$

Während der turbulente Anteil direkt mit einem algebraischen Wirbelviskositätsmodell oder dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell berechnet wird, muß der dispersive Anteil anhand der Meßdaten kalibriert werden. Gegenüber der alleinigen Verwendung einer bereichsweise konstanten Wirbelviskosität hat dies den Vorteil, daß in Bereichen, die keine signifikanten Sekundärströmungen aufweisen, der dispersive Anteil entfällt und somit keine Kalibrierung notwendig ist. Dies reduziert den Aufwand zur Kalibrierung des Modells erheblich. Außerdem ist davon auszugehen, daß ein derart kalibriertes Modell einen größeren Gültigkeitsbereich besitzt (Extrapolation).

### b) Kalibrierung der dimensionslosen Diffusivität $e^*$

Gegenüber dem Standard  $k$ - $\varepsilon$ -Modell für dreidimensionale Rechnungen weist die tiefengemittelte Version zwei zusätzliche sekundäre Produktionsterme auf, die den Einfluß einer vertikalen Profilungleichförmigkeit von  $k$  und  $\varepsilon$  berücksichtigen (vgl. Kap. 2.5.3.2). Hierdurch werden zwei weitere Konstanten, die Schmidtzahl  $\sigma_t$  und die dimensionslose Diffusivität  $e^*$  in das Turbulenzmodell eingeführt. Eine Anbindung des Dispersionsmodells an diese Konstanten liegt daher nahe. Da  $\sigma_t$  und  $e^*$  als Produkt in die Gleichung für den Produktionsterm  $P_{\varepsilon V}$  eingehen (Gl. 2.66), kann die Kalibrierung ohne Einschränkung der Allgemeinheit allein für die dimensionslose Diffusivität  $e^*$  erfolgen. Aus Gleichung 2.56 ist die direkte Proportionalität zwischen der Wirbelviskosität  $\nu_t$  und  $e^*$  abzulesen. Bereiche mit intensiver Sekundärströmungen sind deswegen mit einer erhöhten Diffusivität zu kalibrieren.

Die Kalibrierung des numerischen Mäandermodells erfolgte mit dem zweiten Verfahren. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.16 dargestellt; die erhaltenen Werte für  $e^*$  sind in Tabelle 5.13 zusammengestellt. Vor allem im Hauptgerinnebereich war eine extreme Erhöhung der Diffusivität erforderlich, um die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Innen- und Außenufer an die experimentellen Daten anzugleichen. Insgesamt ist die Übereinstimmung zwischen experimentellen und numerischen Geschwindigkeitsprofilen nach der Kalibrierung sehr gut. Die Abweichungen in Querschnitt 7 im Bereich des Hauptgerinnes sind vermutlich eher auf eine Imperfektion des physikalischen Modells zurückzuführen. Nach der zuvor erläuterten Erhöhung der experimentellen turbulenten kinetischen Energie um den Faktor 2, wird diese von dem mathematischen Modell sogar quantitativ gut wiedergegeben.

In den Abbildungen 5.17 und 5.18 sind weitere Ergebnisse der Simulation mit dem kalibrierten  $k$ - $\varepsilon$ -Modell im Grundriß dargestellt. Der Bezugshorizont des Wasserspiegels (Abb. 5.17 links) liegt im Einlaufquerschnitt 10 cm unter der Hauptgerinne- sohle. Der Wasserspiegel folgt im wesentlichen der Längsneigung des Modells.

Jeweils in der Außenkrümmung des Flußschlauches ist er deutlich überhöht (z.B. Bereich hinter Querschnitt 3). Er liegt hier über dem Wasserspiegel des angrenzenden Vorlandes. Hier wird die Wirkung der Zentrifugalkraft auf den Strom sichtbar, der weitestgehend dem mäandrierenden Flußschlauch folgt. In Bereichen, wo Fluidmassen aus dem Flußschlauch auf die Vorländer gespült werden, sind Wellenmuster im Wasserspiegel zu erkennen (Bereich hinter Querschnitt 3, 7 und 12). Diese stehenden Wellen lassen sich in gleichen Bereichen auch im physikalischen Modell beobachten.

Die Reynoldszahlen (Abb. 5.17 mitte) liegen in einem Bereich von  $10^4$  bis  $10^5$ . Im Flußschlauch ist ihr Maximum jeweils zum Innenufer der Krümmung verlagert. Im zugehörigen Geschwindigkeitsfeld (Abb. 5.17 rechts) ist zu erkennen, daß die Strömung im Hauptgerinne im wesentlichen der Krümmung des Mäanders folgt. In Abschnitten des Mäanders, die zur Längsrichtung des Modells schräg verlaufen, ist jedoch die ebenfalls im Experiment beobachtete geringe Abweichung zwischen der Strömungsrichtung und der Richtung des Hauptgerinnes festzustellen. Im Vorlandbereich folgt die Strömung weitestgehend der Modellängsrichtung. Auch hier wird eine bereits im Experiment erkannte leichte Abweichung von der Parallelströmung (s. Querschnitt 7 und 12) korrekt wiedergegeben.

Die turbulente kinetische Energie (Abb. 5.18 links) zeigt ihre Maxima in Bereichen wo Fluidmassen aus dem Hauptgerinne auf das Vorland gespült werden, was ebenfalls die experimentellen Ergebnisse gut widerspiegelt. Im Bereich des Flußschlauches ist das Maximum der Turbulenzenergie immer zum Innenufer der Krümmung verlagert. Dies deckt sich nicht vollständig mit den experimentellen Untersuchungen. Denn in den Querschnitten 5, 9 und 14 liegt das lokale Maximum tatsächlich näher am Außenufer, wo sich eine Scherschicht zwischen Vorland- und Hauptgerinneströmung ausbildet. Hier wird eine weitere grundsätzliche Schwäche der tiefen gemittelten Simulation offenbar: die Nachbildung horizontaler Scherschichten ist nicht möglich. Die Verteilung der Dissipation (Abb. 5.18 rechts) ist ähnlich derjenigen der Turbulenzenergie. Die flächige Ausdehnung der Maxima ist etwas größer. Im Bereich des Flußschlauches ist die Dissipation am geringsten.

Insgesamt lassen sich mit dem kalibrierten Turbulenzmodell die mittleren Strömungsgrößen sehr gut berechnen. Die Turbulenzgrößen zeigen ebenfalls eine relativ gute Übereinstimmung. Bei ihnen wird jedoch in verstärktem Maße die auf der Tiefenmittelung beruhende Vereinfachung des numerischen Modells deutlich.

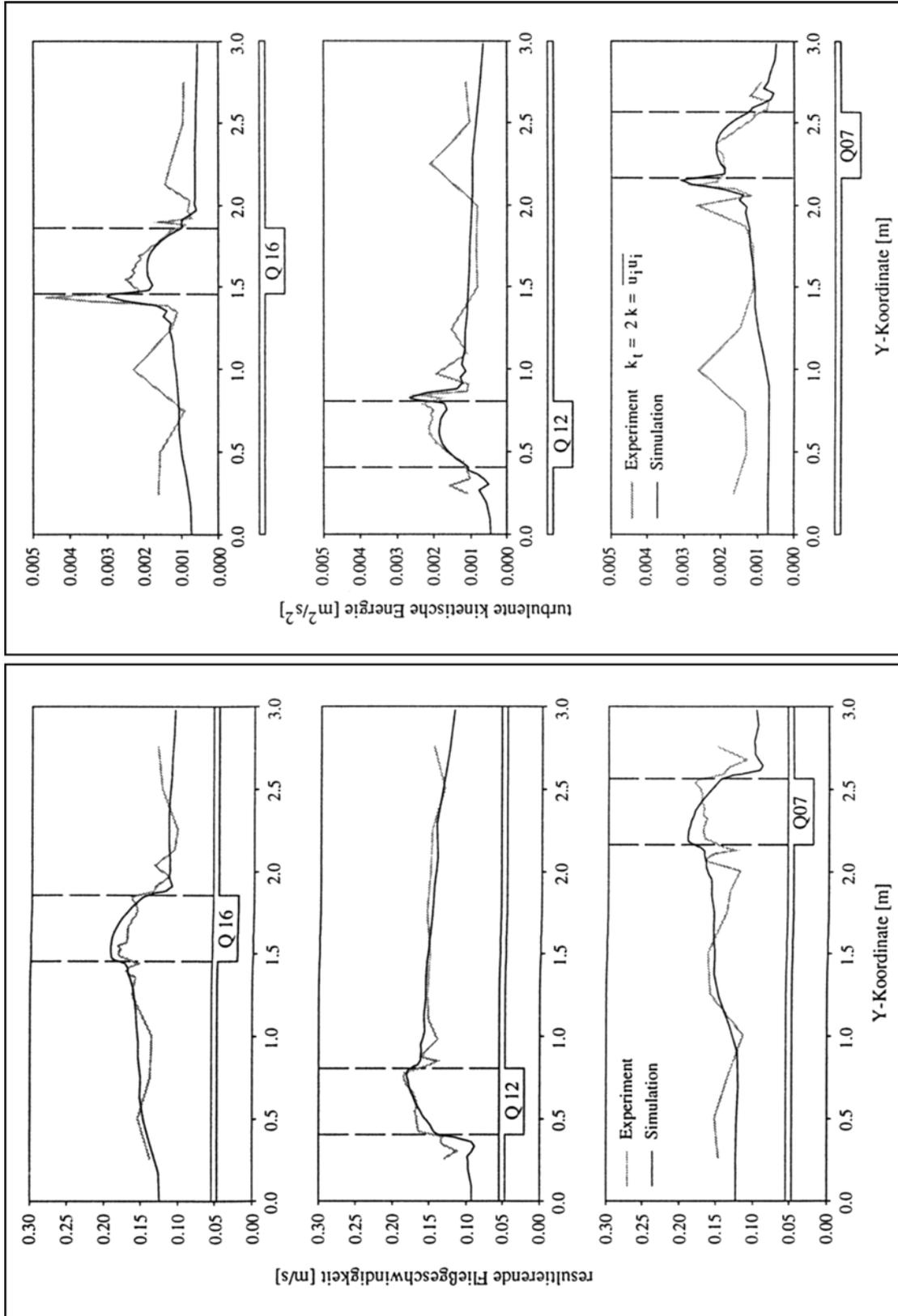


Abb. 5.16: Resultierende Fließgeschwindigkeit und turbulente kinetische Energie; tiefenge-mittelte Simulation mit  $k$ - $\epsilon$ -Modell (kalibriert); Mäanderströmung; Versuch I05 B06 H130

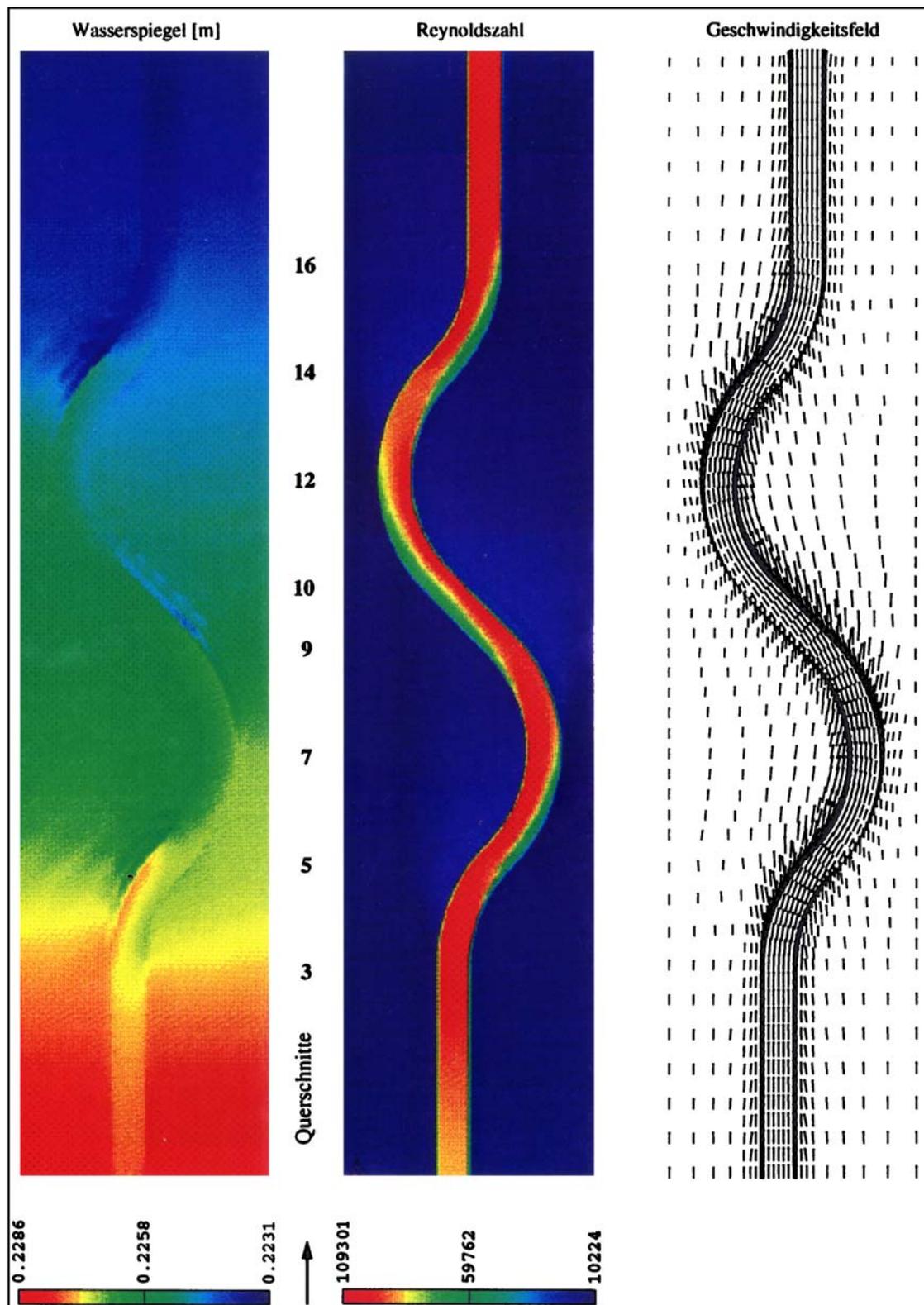


Abb. 5.17: Wasserspiegel (links), Reynoldszahl (mitte) und Geschwindigkeitsfeld (rechts); tiefengemittelte Simulation mit  $k$ - $\varepsilon$ -Modell (kalibriert); Mäanderströmung; Versuch I05 B06 H130

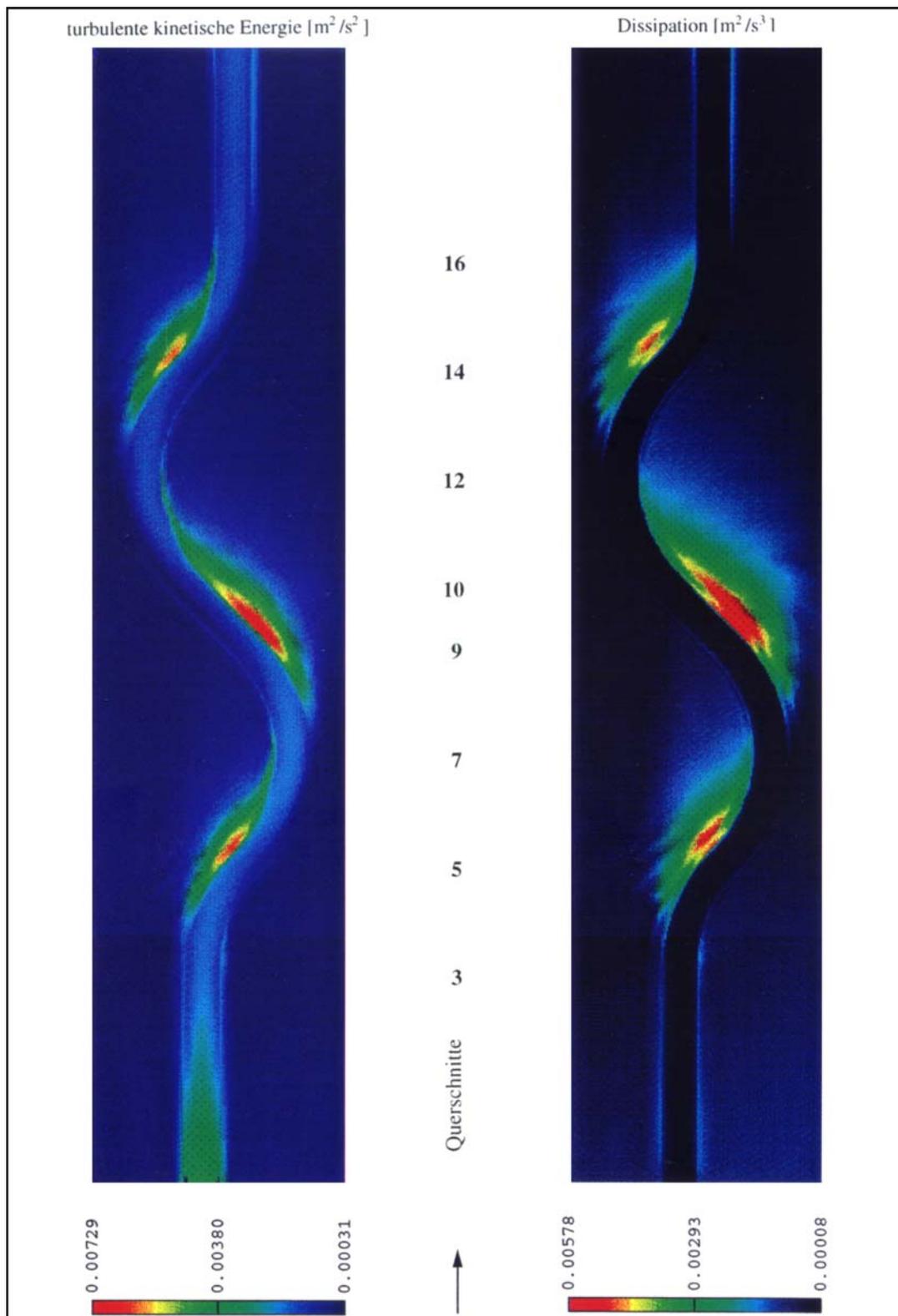


Abb. 5.18: Turbulente kinetische Energie (links) und Dissipation (rechts); tiefengemittelte Simulation mit  $k$ - $\varepsilon$ -Modell (kalibriert); Mäanderströmung; Versuch I05 B06 H130

### 5.2.3 Dreidimensionale Simulation

Gegenüber der tiefengemittelten sind von der dreidimensionalen Strömungssimulation einige entscheidende Verbesserungen zu erwarten. Eine Kalibrierung des Modells zur Eliminierung des Fehlers, der durch die Vernachlässigung der dispersiven Terme in den Flachwassergleichungen entsteht, kann vollständig entfallen. Von besonderem Interesse ist die Frage, ob das numerische Modell in der Lage ist die im physikalischen Mäandermodell beobachteten Sekundärströmungen nachzubilden.

Sekundärströmungen lassen sich nach dem Mechanismus ihrer Entstehung in zwei Klassen einteilen (vgl. NEZU und NAKAGAWA, 1993). In der ersten Klasse (sogenannte "*secondary currents of Prandtl's first kind*") werden sie durch eine Wirbelfadenstreckung verursacht. Dieses Phänomen ist zum Beispiel in gekrümmten Gerinnen unter dem Einfluß von Fliehkräften zu beobachten. In der zweiten Klasse (sogenannte "*turbulence-driven secondary currents*" oder auch "*secondary currents of Prandtl's second kind*") ist die antreibende Kraft eine Inhomogenität und Anisotropie der Turbulenz. In diese Klasse fallen zum Beispiel Sekundärströmungen in geraden gegliederten Kanälen. Eine Simulation dieser turbulenz erzeugten Sekundärströmungen stellt hohe Anforderungen an die Genauigkeit des verwendeten Turbulenzmodells. In der hier untersuchten Mäanderströmung dominieren jedoch die durch Wirbelfadenstreckung (Fliehkräfte und Scherkräfte zwischen Vorland und Hauptgerinneströmung) verursachten Sekundärströmungen. Ihre Nachbildung sollte daher auch mit einfachen algebraischen Wirbelviskositätsmodellen gelingen.

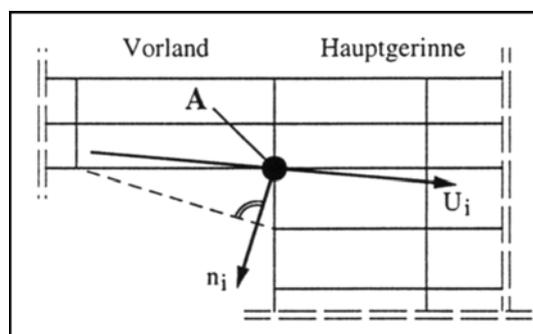


Abb. 5.19: Randbedingungsproblematik an Sohlspüngen

Durch die modifizierte Formulierung der Strömungsgleichungen hinsichtlich der Netztransformation (vgl. Kap. 3.2.1) entfällt die Notwendigkeit die Stufe zwischen Vorland und Hauptgerinne durch eine steile Böschung zu approximieren. Hierdurch werden zum einen die Verhältnisse im physikalischen Modell besser nachgebildet und zum anderen muß das FE-Netz in diesem Bereich nicht so fein diskretisiert werden, wie es bei der zweidimensional-tiefengemittelten Simulation notwendig war. An dem Übergangspunkt Vorland/Hauptgerinne (s. Punkt A in Abb. 5.19) entsteht eine andere Problematik hinsichtlich der Festlegung einer Randbedingung für die Fließgeschwindigkeit. Die Strömung in Randnormalenrichtung müßte einerseits zur Gewährleistung einer globalen Kontinuität entsprechend den Ausführungen des

Kapitels 3.2.3 über die Netzgeometrie festgelegt werden. Andererseits hängt die Strömungsrichtung an diesem Punkt entscheidend von dem umgebenden Strömungsfeld ab; ihre Fixierung würde eine sehr starke Einschränkung bedeuten. Aus diesem Grund blieben alle betroffenen Knoten frei von jeder Randbedingung. Die hierdurch auftretenden globalen Kontinuitätsverluste summierten sich bis zum Auslaufquerschnitt auf einen um ca. 10 % erhöhten Abfluß.

Das der Berechnung zugrundeliegende Netz ist in Abbildung 5.20 dargestellt. Die Einteilung in unterschiedliche Materialzonen erfolgte entsprechend der tiefengemittelten Simulation (s. Abb. 5.12), allerdings entfiel der Böschungsbereich vollständig. Die Materialparameter, wie Rauheitsbeiwerte  $k_S$  für das logarithmische Wandgesetz sowie Rauheitsbesetzung der Vorländer, entsprechen den Werten aus Tabelle 5.13 für die tiefengemittelte Simulation.

Die gewählte Netzfeinheit reichte leider nicht aus mit dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell ein Ergebnis für die turbulenten Parameter zu erzielen. Die vorliegenden Berechnungsergebnisse basieren daher auf dem in Kapitel 2.5.2.1 beschriebenen algebraischen Wirbelviskositätsmodell. Mit diesem Ansatz ergaben sich an vereinzelt Stellen extrem kleine Wirbelviskositäten in der Größenordnung der kinematischen Viskosität. Um die hierdurch auftretenden Stabilitätsprobleme zu vermeiden, wurde für die Wirbelviskosität ein Minimalwert ( $\nu_t > 5 \cdot 10^{-5}$ ) festgesetzt.

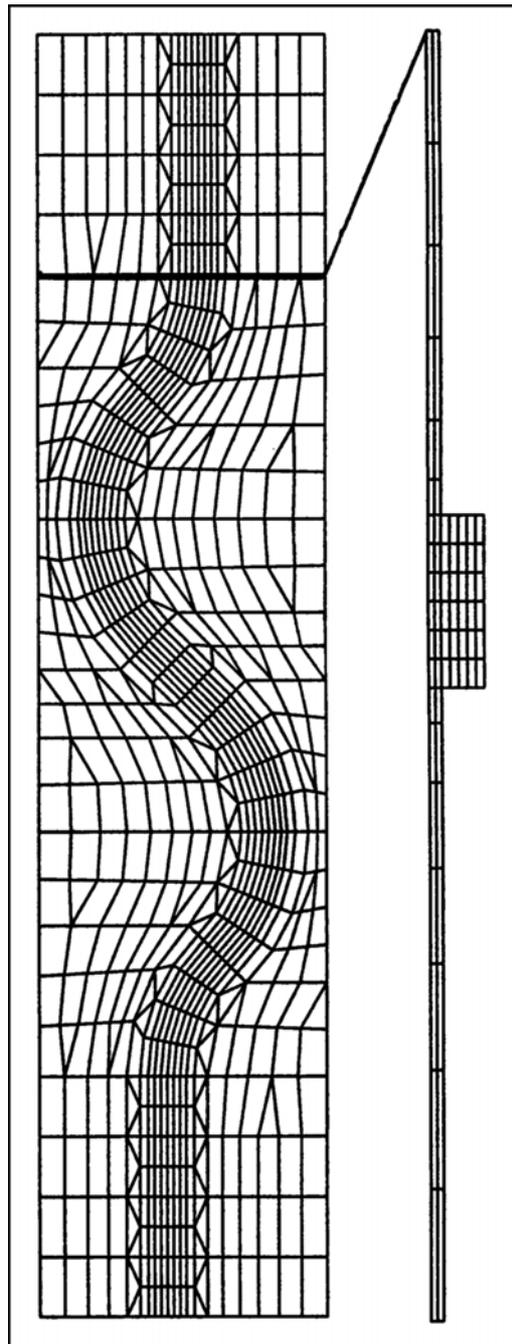


Abb. 5.20: FE-Netz für die dreidimensionale Strömungssimulation des Mäandermodells  
(Aufsicht und Schnitt durch Querschnitt 16)

In Abbildung 5.21 sind tiefengemittelte resultierende Fließgeschwindigkeiten dargestellt. Hier wird der Kontinuitätsfehler, der aus der fehlenden Randbedingung am Sohlprung resultiert, offenbar: Querschnitt 16 weist die größte Abweichung zu den experimentellen Daten auf. Insgesamt ist die qualitative Übereinstimmung in allen Querschnitten sehr gut. Der Anstieg der Fließgeschwindigkeit vom Außen- zum Innenufer wird in der richtigen Größe berechnet. Auf dem Vorland unmittelbar neben dem Hauptgerinne ist sowohl in den experimentellen als auch in den numerischen

Daten eine kleine Geschwindigkeitsspitze zu erkennen. Diese Ergebnisse zeigen deutlich, daß im Gegensatz zur tiefengemittelten Simulation (s. Kap. 5.2.2) der Einfluß der Sekundärströmungen auf die mittlere Fließgeschwindigkeit korrekt erfaßt wird; auf eine Kalibrierung des numerischen Modells kann im vorliegenden Fall verzichtet werden.

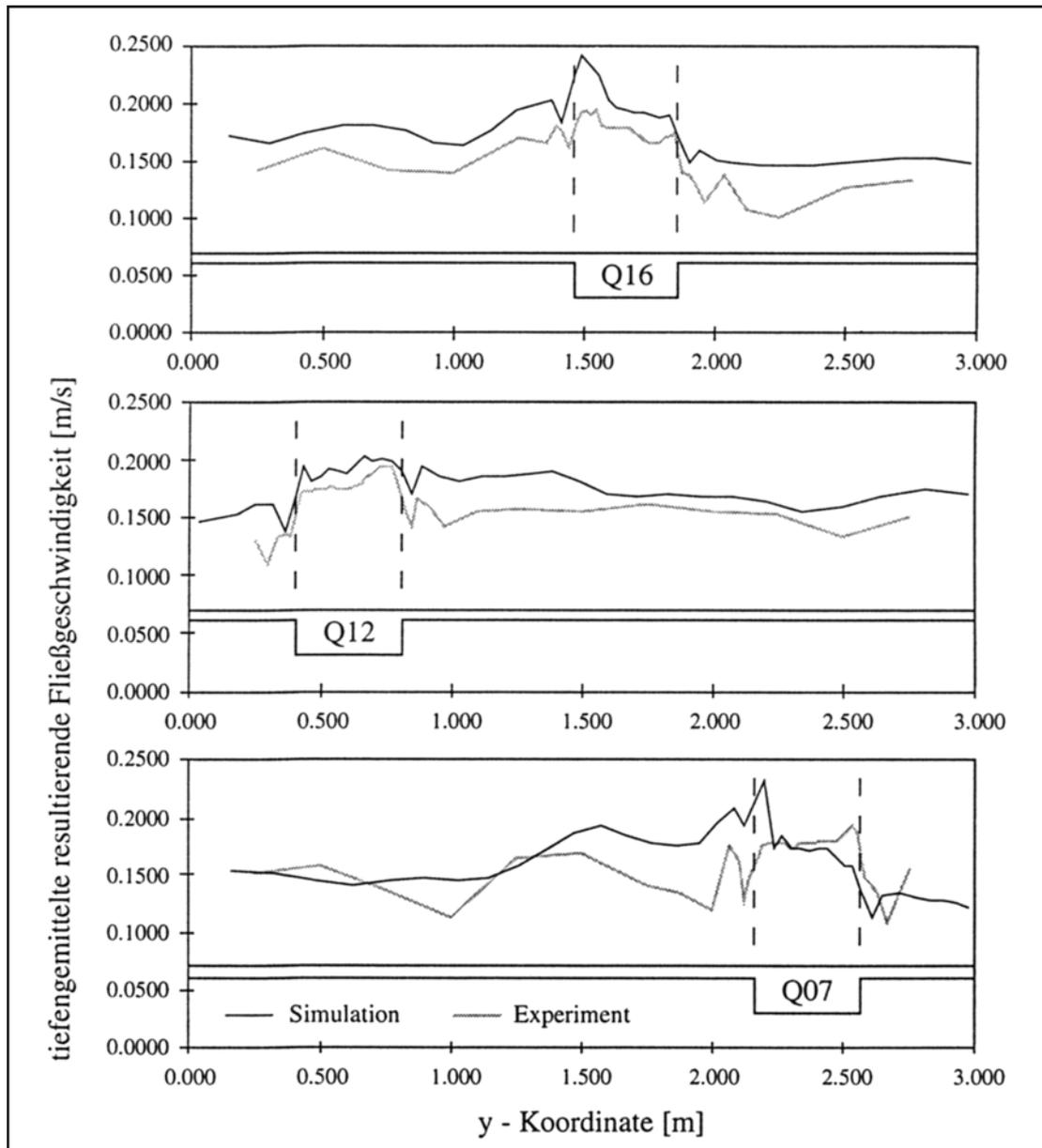


Abb. 5.21: Tiefengemittelte resultierende Fließgeschwindigkeiten - 3D Simulation Mäandermodell; Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell

In Abbildung 5.22 sind die berechneten Sekundärströmungen in den gleichen 3 Querschnitten dargestellt. Ein qualitativer Vergleich mit den experimentellen Daten (vgl. Abb. 4.13) zeigt, daß der dominierende Wirbel in der Sekundärströmung nach Lage und Ausdehnung sehr gut nachgebildet wird. Demgegenüber fehlt der auf

Fliehkrafteinfluß zurückzuführen. Der Wirbel ist vollständig, obwohl das verwendete algebraische Wirbelviskositätsmodell seine Simulation erlaubt (vgl. oben: Ausführungen zur Sekundärströmung und Simulation der Rozovskii-Schleife in Kap. 5.1). Die Ursache für das Fehlen dieses Wirbels wird daher vorwiegend in einer zu geringen Netzfeinheit gesehen.

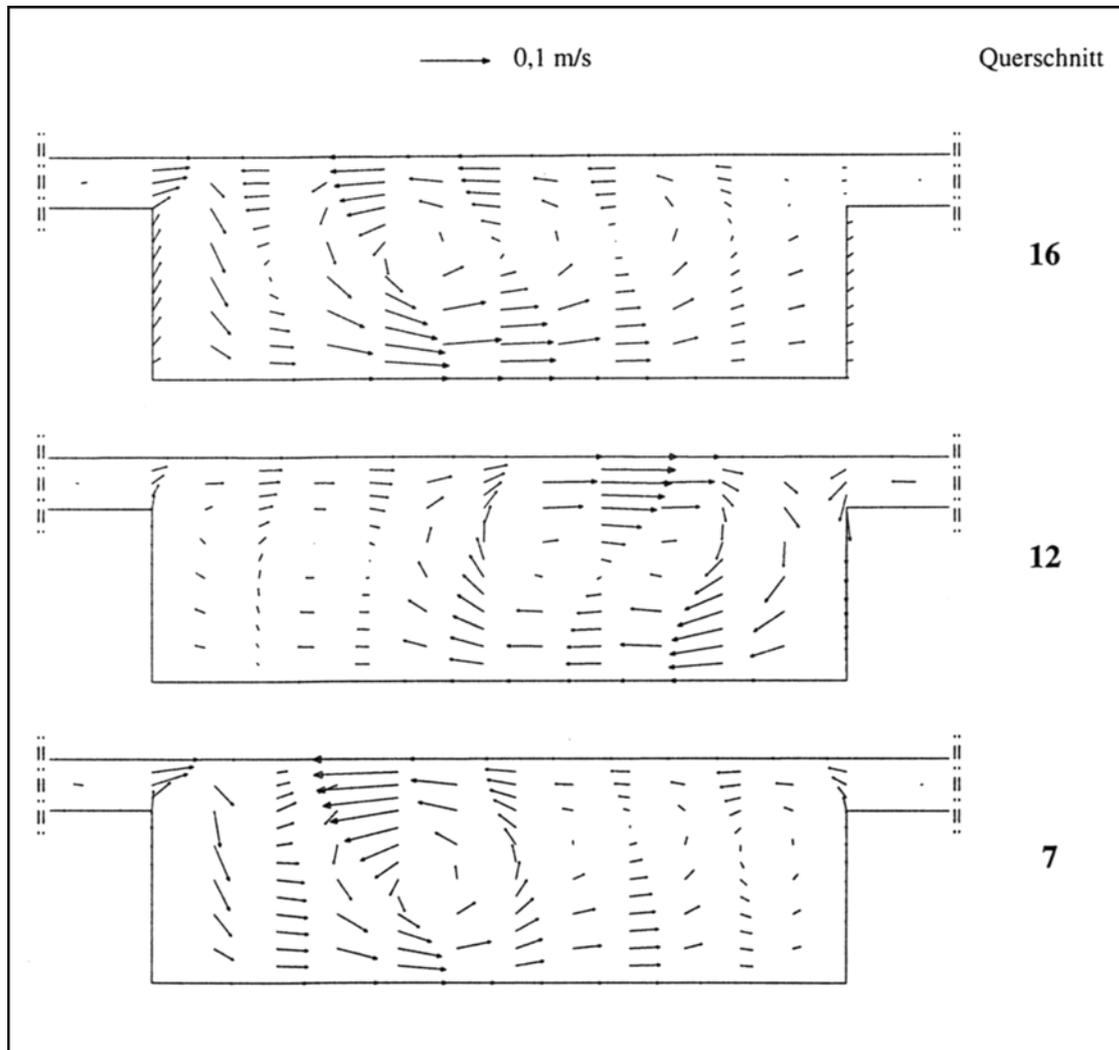


Abb. 5.22: Sekundärströmungen - 3D Simulation Mäandermodell;  
Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell

In den folgenden Abbildungen 5.23 bis 5.24 sind wiederum für die Querschnitte 7, 12 und 16 alle drei Komponenten der Fließgeschwindigkeit den entsprechenden experimentellen Daten gegenübergestellt. Die Darstellungen sind auf den Bereich des Hauptgerinnes beschränkt und geben die Fließgeschwindigkeit in verschiedenen Höhen  $z'$  über der Gerinnesohle wieder. Auch hier stimmt die Simulation mit den Ergebnissen des physikalischen Modellversuchs zum Teil sehr gut überein. Die verbleibenden Abweichungen begründen sich in diesem Fall vermutlich auch auf dem einfachen Turbulenzmodell.

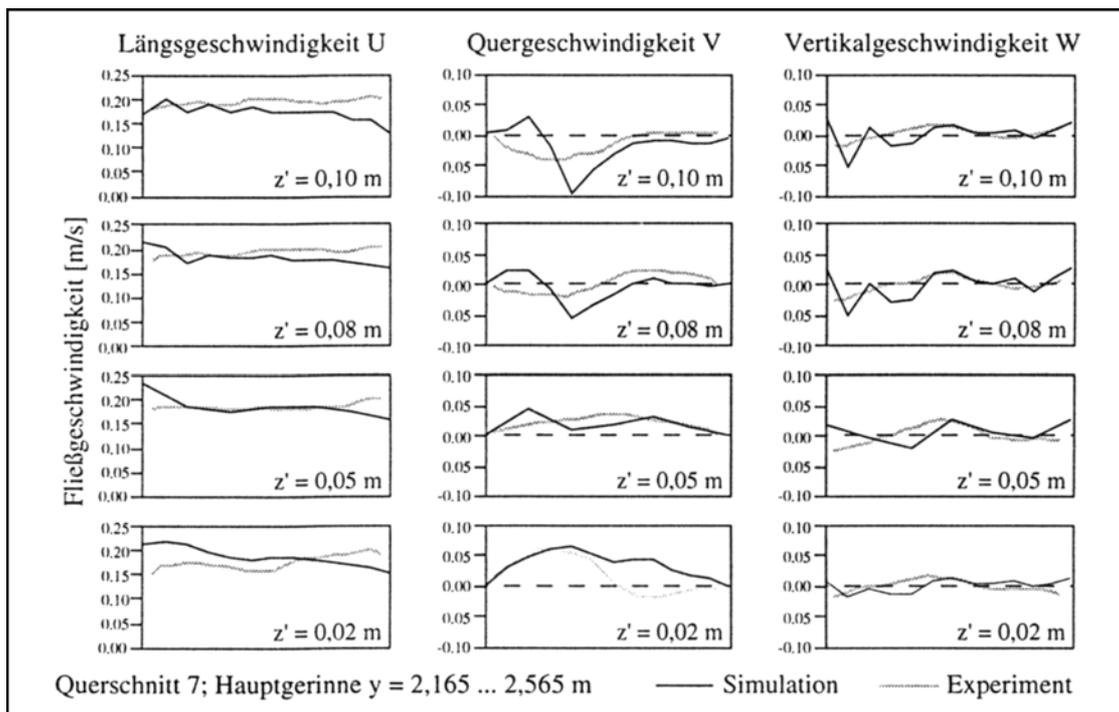


Abb. 5.23: Fließgeschwindigkeiten in Querschnitt 7 in verschiedenen Höhen  $z'$  - 3D Simulation Mäandermodell; Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell

In der letzten Abbildung dieses Abschnittes (Abb. 5.26) sind der berechnete Wasserspiegel und das Fließgeschwindigkeitsfeld gegeben. Der Verlauf des Wasserspiegels entspricht weitestgehend den Ergebnissen der tiefengemittelten Berechnung. Allerdings sind die Wellenstrukturen in Bereichen, wo eine Strömung aus dem Hauptgerinne auf das Vorland erfolgt, stärker ausgeprägt. Das Fließgeschwindigkeitsfeld ist in zwei Höhen ( $z' = 11,5 \text{ cm}$  und  $z' = 5,0 \text{ cm}$ ) über der Vorlandsohle gegeben. In der Höhe  $z' = 5,0 \text{ cm}$  folgt die Strömung vollständig dem Hauptgerinne; die Sekundärströmung wird hier sichtbar an der Abweichung der Strömungsrichtung von der Richtung der Hauptgerinnegeometrie. In dem Schnitt bei  $z' = 11,5 \text{ cm}$  werden die Scherkräfte zwischen der Vorland- und Hauptgerinneströmung deutlich, die die Ursache für die intensive Sekundärströmung sind. Zum Beispiel im Bereich der Querschnitte 9 und 10 behalten die Fluidmassen vom Vorland ihre Richtung bis etwa zur Mitte des Hauptgerinnequerschnittes bei, bevor sie von der Hauptgerinneströmung weitertransportiert werden.

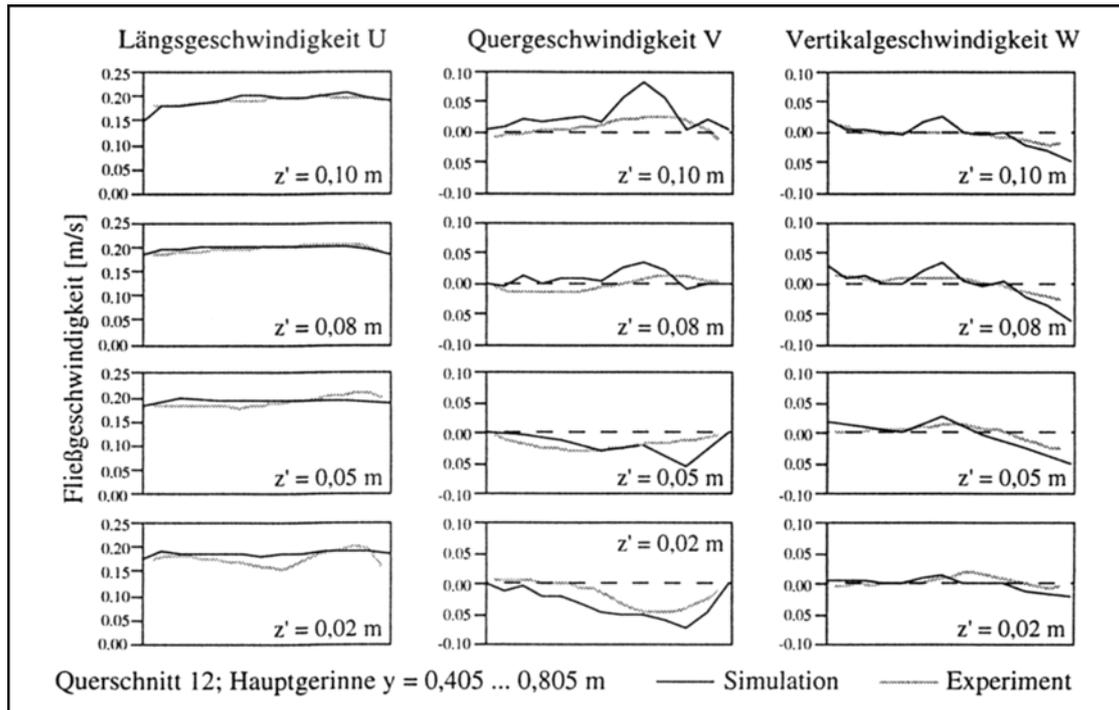


Abb. 5.24: Fließgeschwindigkeiten in Querschnitt 12 in verschiedenen Höhen  $z'$  - 3D Simulation Mäandermodell; Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell

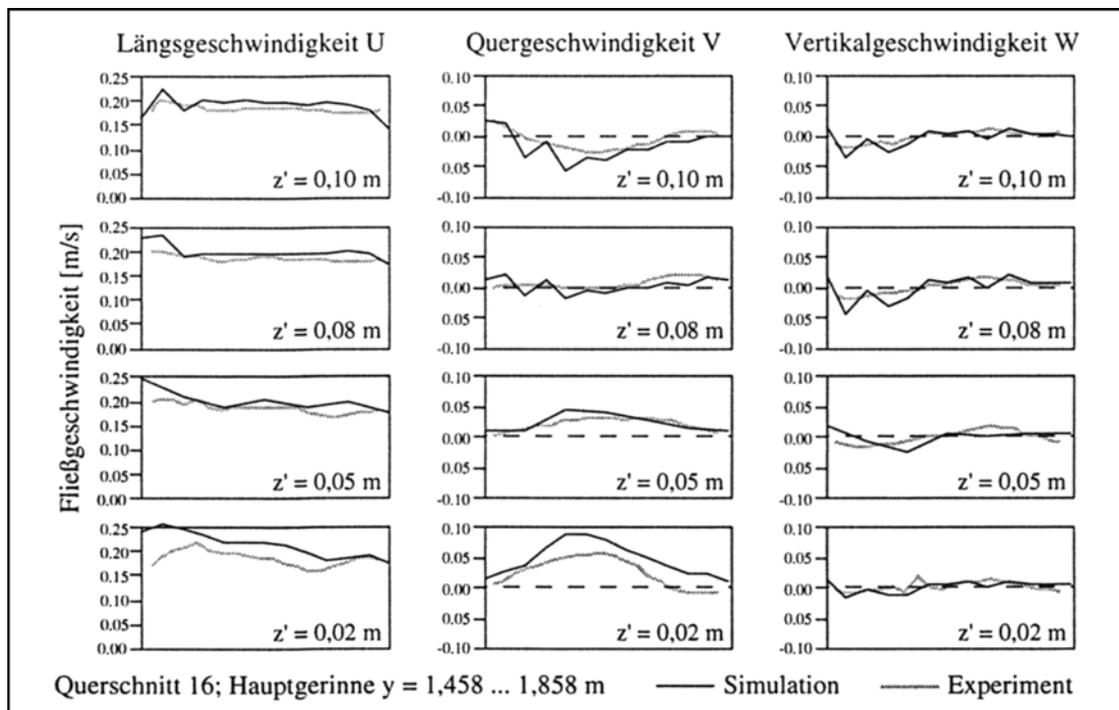


Abb. 5.25: Fließgeschwindigkeiten in Querschnitt 16 in verschiedenen Höhen  $z'$  - 3D Simulation Mäandermodell; Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell

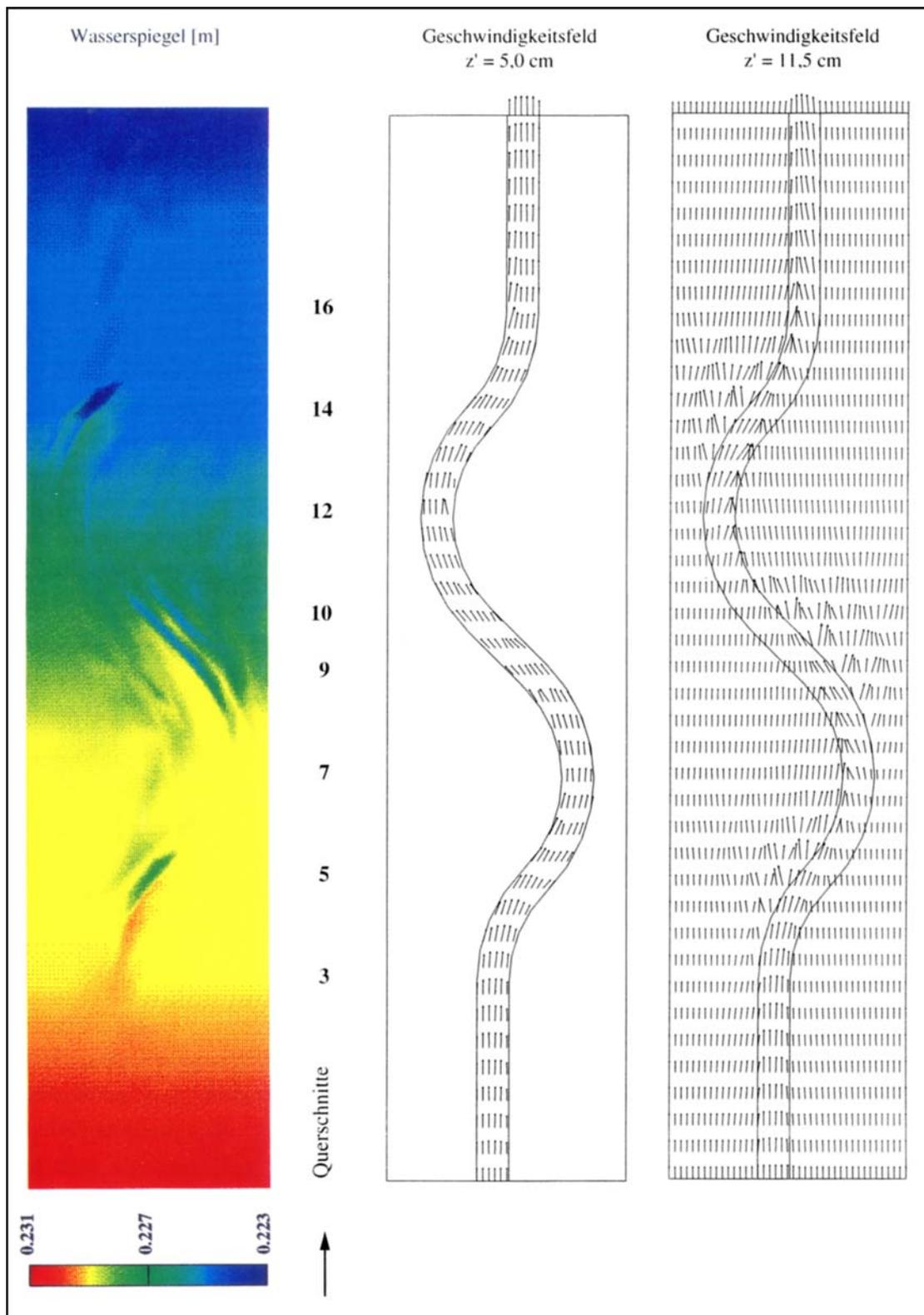


Abb. 5.26: Wasserspiegel und Fließgeschwindigkeitsfeld in zwei Höhen  $z'$  - 3D Simulation Mäandermodell; Versuch I05 B06 H130 mit algebraischem Wirbelviskositätsmodell

### 5.3 Wurmmodell

Zum Abschluß der Anwendungsbeispiele wird die Simulation der Strömung im Wurmmodell (vgl. Kap. 4.2) präsentiert. An diesem Beispiel soll die praktische Einsatzmöglichkeit des entwickelten Finite-Elemente-Programms aufgezeigt werden. Zwar handelt es sich auch hier um ein Laborgerinne, die Heterogenität der untersuchten Strömungsgeometrie sowie das Vorgehen zur Generierung der Eingabedatensätze entsprechen jedoch vollständig den Verhältnissen in der Natur. Die Simulation beschränkt sich auf die tiefengemittelte Modellierung. Die dreidimensionale Strömungssimulation würde eine Berechnung auf dem Hochleistungsrechner der RWTH (Siemens-Nixdorf Vektorrechner S600/20) erfordern. Dies konnte aus zeitlichen Gründen nicht in der Bearbeitungsphase des DFG-Projektes erfolgen.

In einem ersten Arbeitsschritt wurde ein Basis-Finite-Elemente-Netz generiert, das die Aufteilung der Strömungsgeometrie in Vorland- und Hauptgerinnebereich sowie unterschiedliche Materialzonen widerspiegelt (s. Abb. 5.27). Dieses in "Superelemente" aufgeteilte Netz ist ein Eingabedatensatz für einen Netzgenerator. Auf der Grundlage einer für jedes Superelement wählbaren Zerlegung wird hieraus ein für die Simulation geeignetes Netz generiert. Die Sohlhöhen dieses Netzes werden schließlich aus den aufgemessenen Querprofilen (s. Abb. 4.20) interpoliert. Auf diesem Weg läßt sich die Datengrundlage für den Berechnungsablauf äußerst effizient erstellen. Sobald die Querprofildaten aus der Natur vorliegen, kann die Vorbereitung der Eingabedaten auch von einem ungeübten Bearbeiter innerhalb von wenigen Arbeitstagen bewältigt werden. Auf der Grundlage des Basisnetzes lassen sich Änderungen, wie Variantenstudien oder eine feinere Diskretisierung, in kürzester Zeit durchführen. Das auf diesem Weg erhaltene Finite-Elemente-Netz ist in Abbildung 5.28 dargestellt. Zusätzlich sind in der gleichen Abbildung die Sohlhöhen als Farbrastergrafik enthalten.

Die Simulation erfolgte mit dem tiefengemittelten Modell unter Verwendung des algebraischen Wirbelviskositätsansatzes (s. Kap. 2.5.2.2). Im Zusammenhang mit dem "Trockenfallen" einzelner Elemente erfordert die Verwendung von Turbulenzmodellen zusätzliche Maßnahmen zur Stabilisierung des iterativen Lösungsalgorithmus. Nach einer Initialisierung des Strömungsfeldes mit einer konstanten Wirbelviskosität, wird die mit dem algebraischen Modell berechnete Wirbelviskosität schrittweise aufgebracht. Die effektive Wirbelviskosität berechnet sich dabei mit einem inkrementierten Faktor  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < 1$ ) zu:

$$\nu_{t,\text{eff}} = \alpha \nu_{t,\text{konstant}} + (1 - \alpha) \nu_{t,\text{algebraisch}}$$

Dieses Vorgehen erlaubt zusätzlich eine Kalibrierung des numerischen Modells zur Berücksichtigung der dispersiven Terme (vgl. Kap. 5.2.2: Gemischter Wirbelviskositätsansatz). Hierzu wird der Faktor  $\alpha$  auf einen kleinen Wert (hier:  $\alpha = 0,01$ ) inkrementiert.

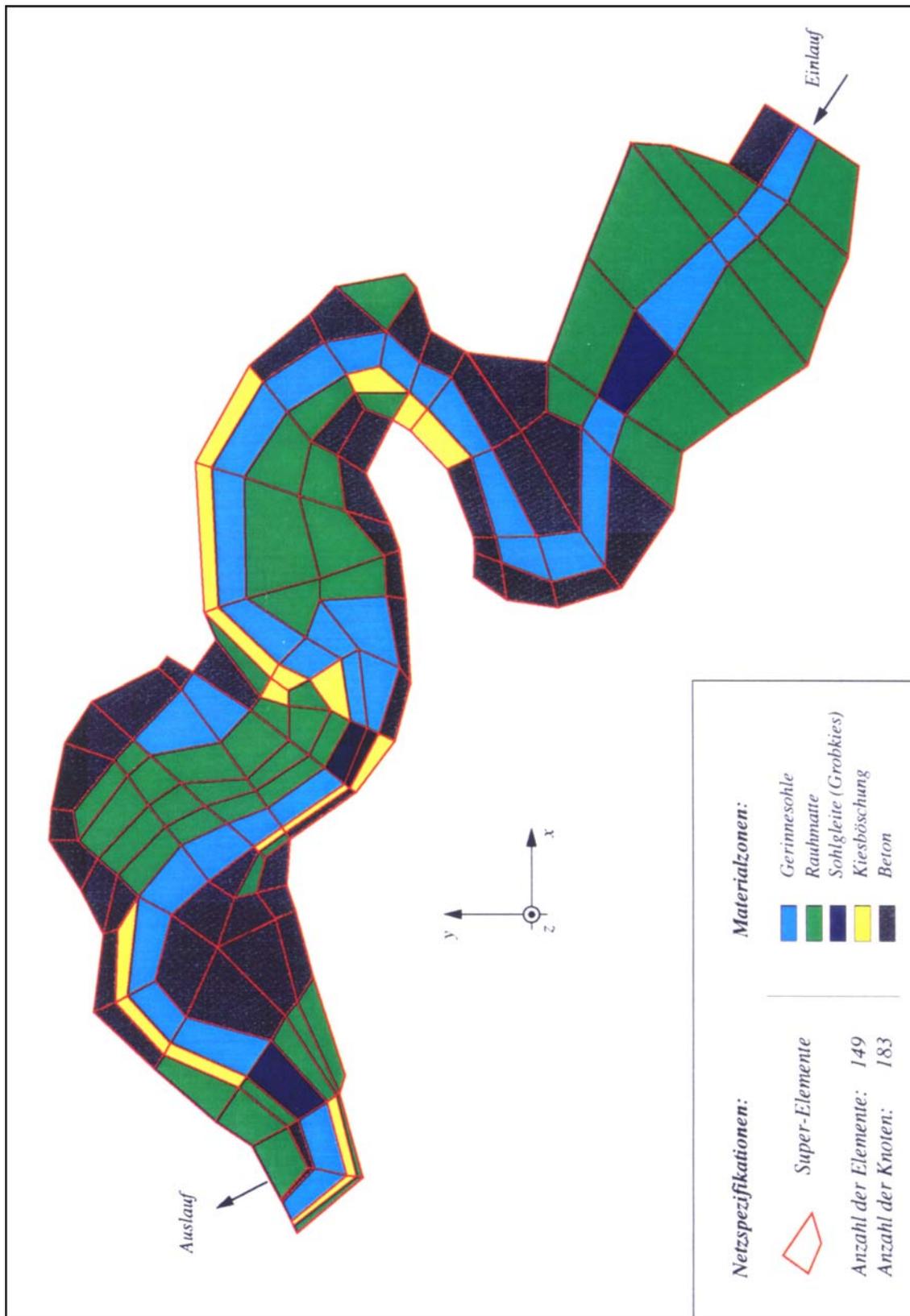


Abb. 5.27: Aufteilung des Wurmodells im Basisnetz nach Rauheitsbereichen

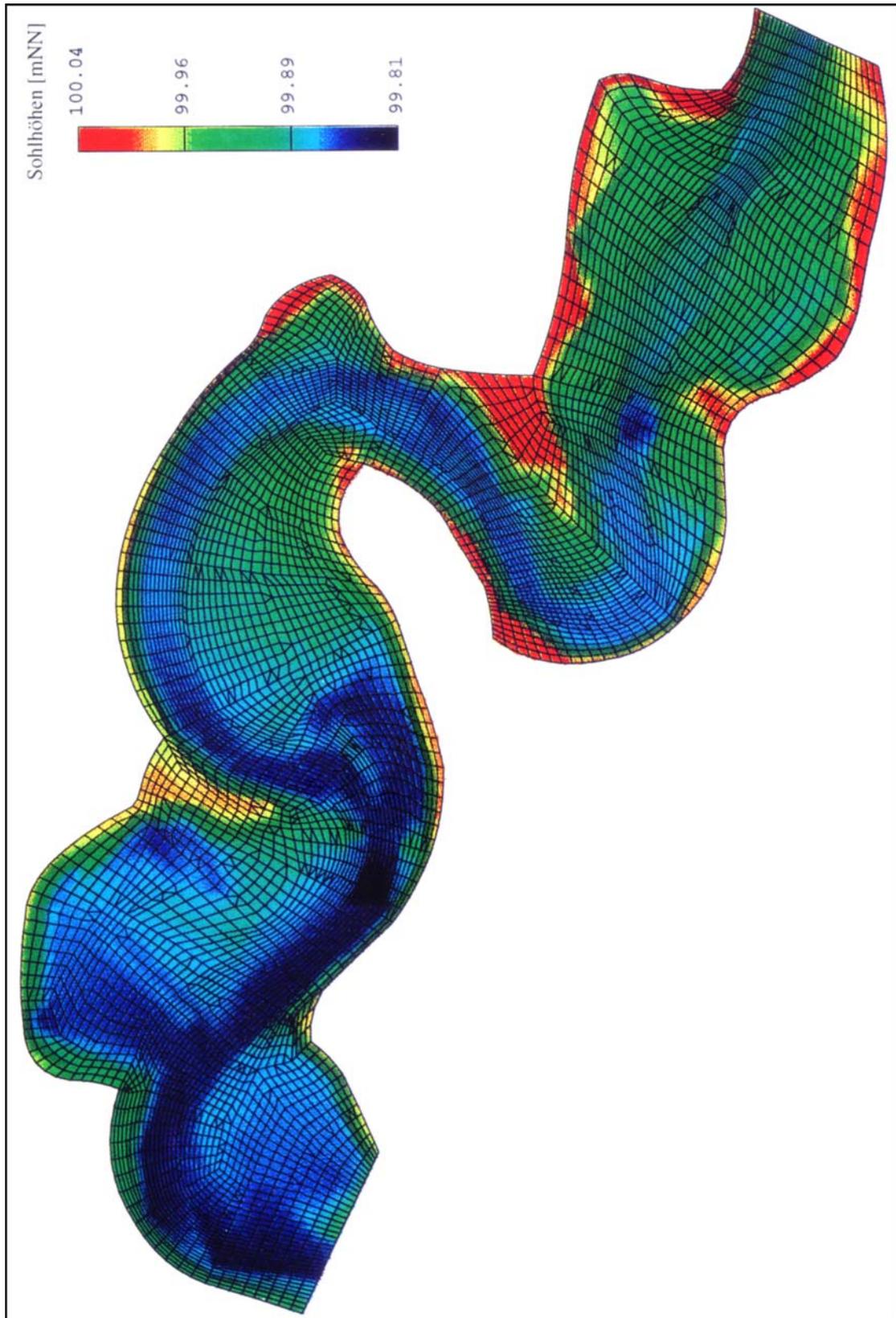


Abb. 5.28: Finite-Elemente-Netz und Sohlhöhen - Wurmmodell

Mit diesem inkrementellen Faktor kann die Kalibrierung des numerischen Modells anhand der Meßdaten unter Anpassung des konstanten Anteils der Wirbelviskosität erfolgen. Die im folgenden dargestellten Ergebnisse wurden bislang nur hinsichtlich der Sohlrauheiten kalibriert. Sie zeigen noch geringe Abweichungen zu den experimentellen Daten.

Die Sohlrauheiten wurden mit dem Widerstandsgesetz von *Colebrook/White* (Kap. 2.4.1.2) berechnet. In Randbereichen, wo die Fließtiefe das zweifache der äquivalenten Sandrauheit  $k_s$  unterschreitet und das Widerstandsgesetz seine Gültigkeit verliert, erfolgt die Berechnung der Sohlrauheit nach dem Fließgesetz von *Manning*. Eine Zusammenstellung der Turbulenz- und Sohlrauheitsparameter enthält Tabelle 5.29. Im Einlauf wurde das experimentelle Geschwindigkeitsprofil für den Abfluß von  $Q = 12,17$  l/s als Dirichlet'sche Randbedingung festgelegt und im Auslauf die zugehörige experimentelle Fließtiefe als Neumann'sche Randbedingung (Wasserspiegel  $S \approx 99,905$  mNN).

Tab. 5.29: Turbulenz- und Rauheitsparameter für die Simulation des Wurmmodells

Materialzone	Parameter			
	$\nu_{t,constant}$ [m <sup>2</sup> /s]	$e^*$ -	$k_s$ [m]	Manning's n [m <sup>-1/3</sup> /s]
Gerinnesohle	0,050	0,6	0,010	0,018
Rauhmatte	0,050	0,6	0,060	0,024
Sohlgleite	0,050	0,6	0,030	0,021
Kiesböschung	0,050	0,6	0,030	0,021
Beton	0,050	0,6	0,005	0,016

Der berechnete Wasserspiegel ist mit Abbildung 5.30 gegeben. In der Darstellung sind nur noch die Elemente enthalten, die nicht aufgrund zu geringer Fließtiefen ( $H < 5$  mm) aus der Berechnung herausgefallen sind. Wesentliche Strömungseigenschaften, wie eine Überhöhung des Wasserspiegels in den Außenkurven der Mäander sowie ein Rückstau vor den beiden Sohlgleiten und der Engstelle, sind der Abbildung zu entnehmen. In der ersten Sohlgleite fällt der Wasserspiegel aufgrund der hohen Fließgeschwindigkeiten deutlich ab. Die Abflußcharakteristik liegt hier im schießenden Bereich (Froudezahl  $Fr > 1,0$ ). Der sich anschließende Übergang zu einem strömenden Abfluß wird an einer leichten Wellenbewegung des Wasserspiegels sichtbar.

Abbildung 5.31 gibt das berechnete Strömungsfeld wieder. Die Lage und Ausdehnung der Rezirkulationszonen (Ausschnittsvergrößerung für den Auslaufbereich) wurden durch eine optische Begutachtung des physikalischen Modells bestätigt. Zum Vergleich sind in Abbildung 5.32 gemessene und berechnete Geschwindigkeitsprofile für den Querschnitt X.A (vgl. Abb. 4.20) dargestellt. Enthalten sind die resultierende Fließgeschwindigkeit sowie die Komponenten in Normal- und Tangentialrichtung bezogen auf die Lage des Querschnitts. Die Übereinstimmung ist hinsichtlich des geringen Aufwandes, der bislang in die Kalibrierung des Modells gesteckt wurde, sehr zufriedenstellend.

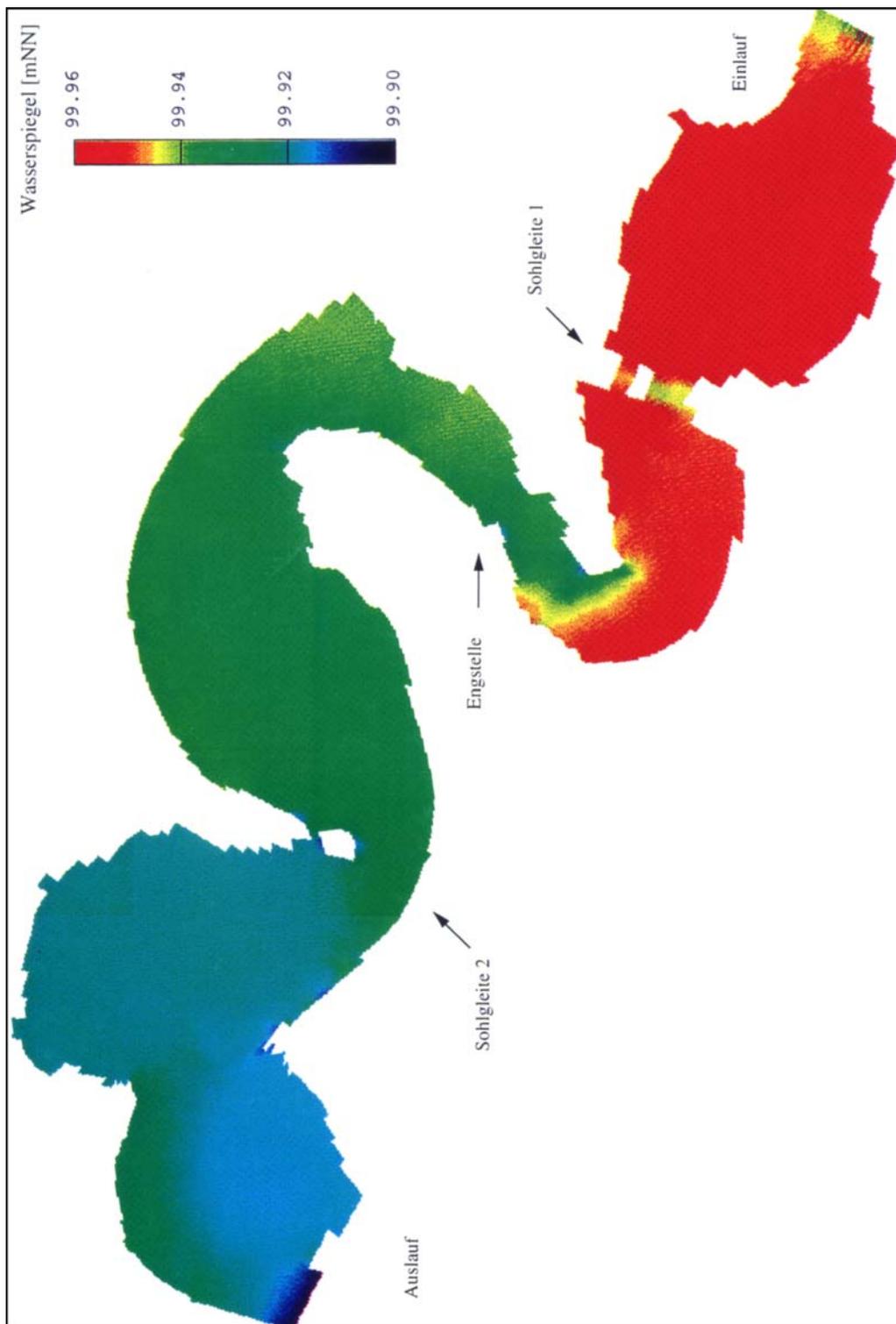


Abb. 5.30: Verlauf des berechneten Wasserspiegels - Wurmmodell

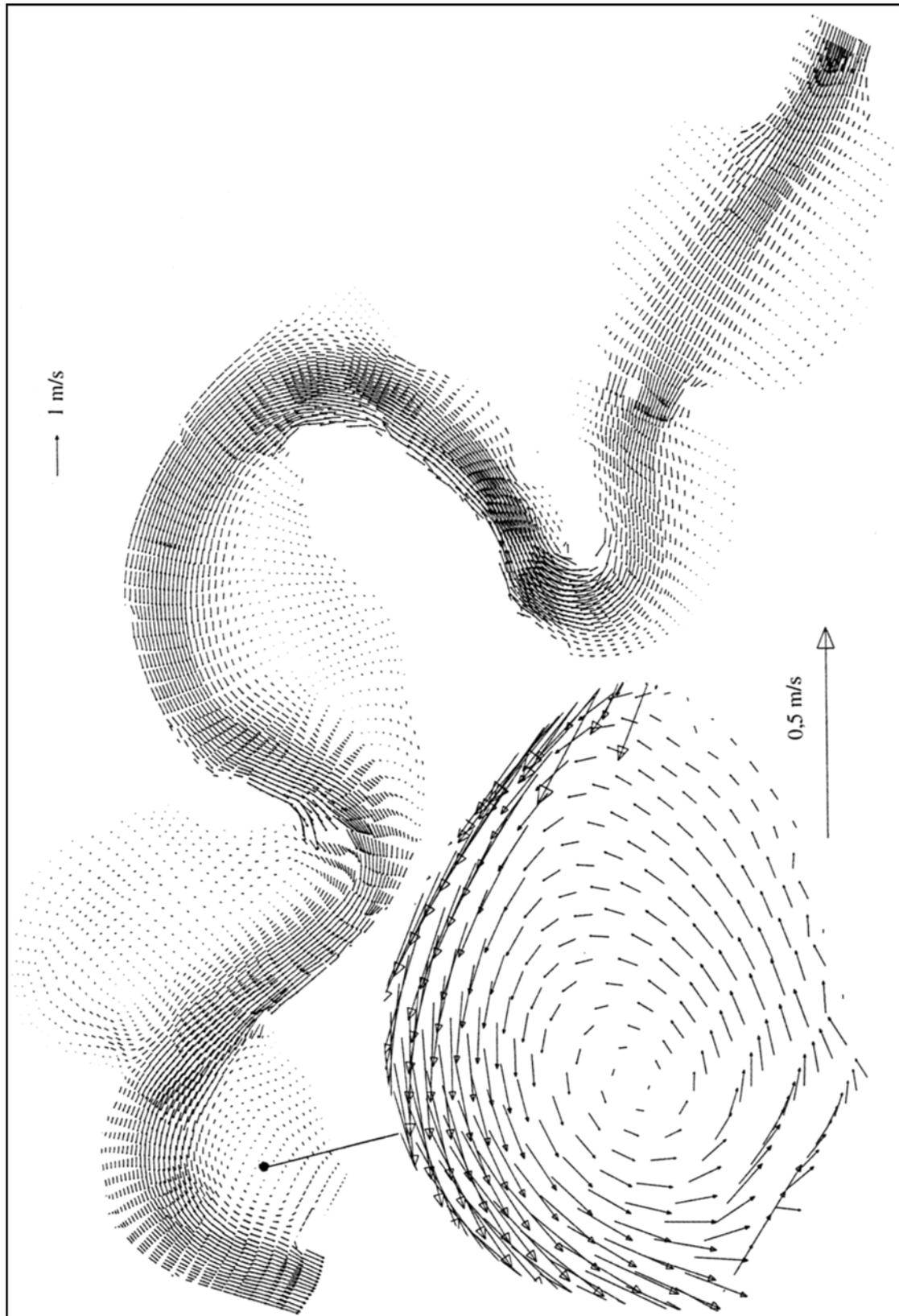


Abb. 5.31: Fließgeschwindigkeitsfeld - Wurmmodell

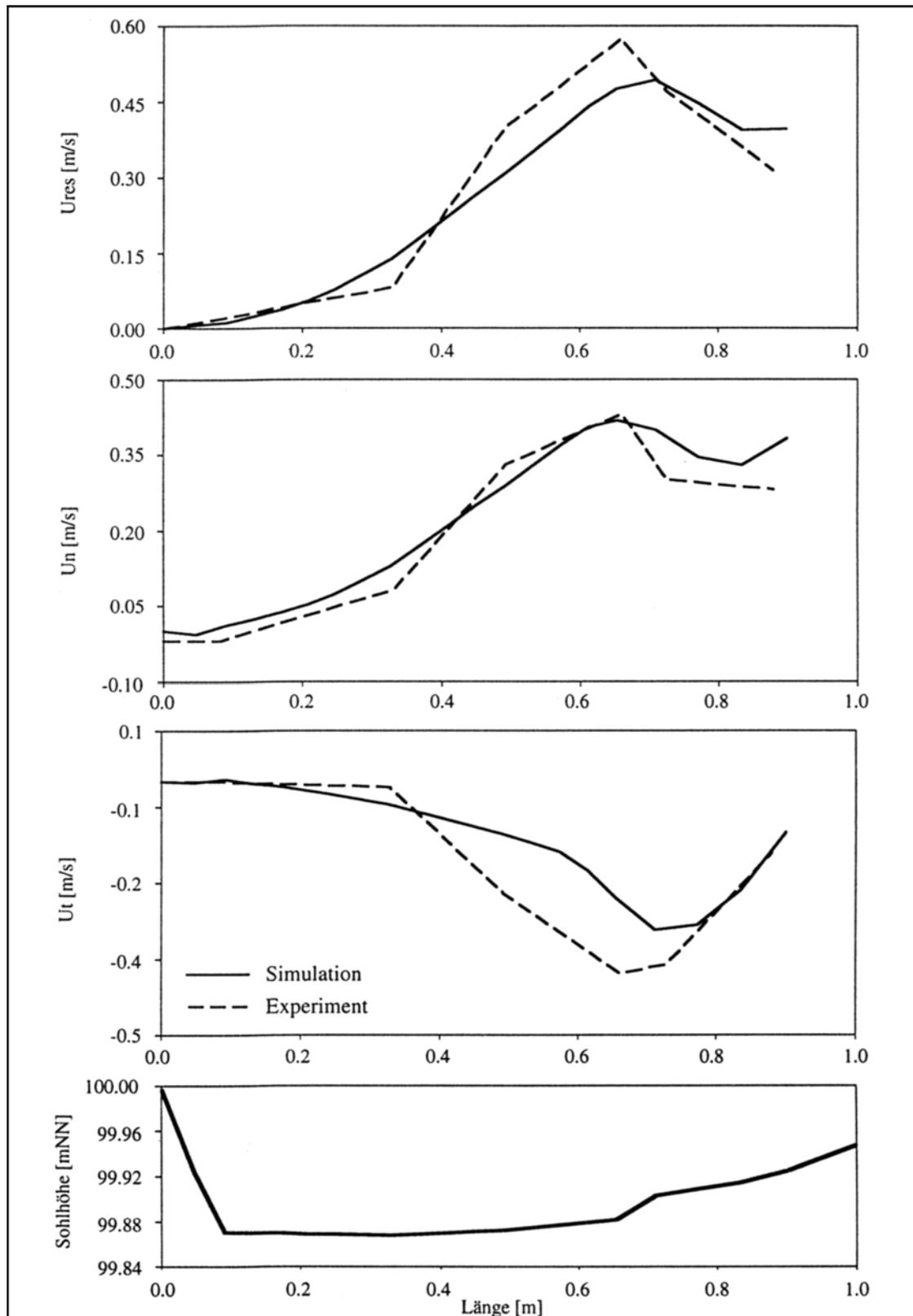


Abb. 5.32: Gemessene und berechnete Geschwindigkeitsprofile für Querschnitt X.A - Wurmmodell

## 6 Zusammenfassung

Die Planung naturnaher Fließgewässer stellt aufgrund der Komplexität der Strömungsvorgänge in heterogenen, mäandrierenden Flußläufen Anforderungen an die numerische Simulation, die von eindimensionalen Berechnungsverfahren nicht erfüllt werden können. In der eindimensionalen Strömungssimulation bereitet vor allem die notwendige Definition des am Abfluß beteiligten Gewässerquerschnitts (Strömbereichsgrenzen) große Schwierigkeiten. Dies kann ohne eine ausreichende Kalibrierung des Modells zu relativ willkürlichen Ergebnissen führen. Die Aussagekraft dieser Modelle beschränkt sich zudem auf die Ermittlung der Wasserspiegellagen. Doch die Kenntnis des Fließgeschwindigkeitsfeldes ist für die Berechnung von Transportvorgängen (Schadstoffausbreitung) sowie der Beurteilung von Erosionsrisiken fundamental. Durch die Steigerung der Leistungsfähigkeit elektronischer Rechenanlagen während der letzten zwei Jahrzehnte sind heute zwei- und dreidimensionale Simulationen der Strömungs- und Transportvorgänge in naturnahen Gewässern möglich, die mit ihrer wesentlich höheren Aussagekraft und Genauigkeit den gewachsenen Anforderungen einer modernen Fließgewässerplanung gerecht werden.

Im Rahmen dieses Projektes wurde ein zweidimensional-tiefengemitteltes und ein dreidimensionales numerisches Verfahren zur Simulation natürlicher Strömungsvorgänge entwickelt. Die Entwicklungsarbeiten wurden von umfangreichen experimentellen Untersuchungen an einem mäandrierenden Gerinne mit überströmten Vorländern begleitet. Die Messungen erfolgten mit einem 3-Kanal-Laser-Doppler-Anemometer, der die berührungsfreie und simultane Erfassung des dreidimensionalen Strömungsvektors und der sechs unabhängigen Komponenten des Reynoldsspannungstensors erlaubt. Aus den experimentellen Daten konnten neue grundlegende Erkenntnisse hinsichtlich des Strömungsverhaltens und der Turbulenzstrukturen in mäandrierenden gegliederten Gerinnen abgeleitet werden. Die parallele Bearbeitung der physikalischen Modellversuche erlaubte neueste Erkenntnisse ohne zeitlichen Verzug in den numerischen Entwicklungsarbeiten zu berücksichtigen. Die Verfügbarkeit von umfassenden und qualitativ hochwertigen experimentellen Daten erlaubte eine ausgezeichnete Verifikation der entwickelten Simulationsmodelle.

Mit den derzeit verfügbaren Rechenleistungen stellt die zweidimensional-tiefengemittelte Strömungssimulation ein effizientes Berechnungsverfahren selbst für ausgedehnte Strömungsgebiete dar. Die Simulation läßt sich mit einer ausreichenden Netzfeinheit auch auf handelsüblichen Workstations in kürzester Zeit durchführen. In praktischen Anwendungen in der Vergangenheit wurden diese Modelle fast ausschließlich unter Ansatz einer bereichsweise konstanten Wirbelviskosität verwendet. Da eine Abschätzung der Wirbelviskosität im allgemeinen schwierig ist, muß sie zusammen mit den Sohlrauheiten kalibriert werden. Abgesehen von

dem großen Aufwand, den die Kalibrierung dieser beiden unabhängigen Parameter bedeutet, ist im allgemeinen nicht davon auszugehen, daß mit einem einzigen kalibrierten Parametersatz unterschiedliche Hochwassereignisse in einem Gewässer richtig modelliert werden können. Darum muß ein zuverlässiges numerisches Strömungsmodell eine möglichst realistische Modellierung turbulenter Prozesse gewährleisten. Darüberhinaus zeigen die Verifikationsrechnungen mit dem tiefengemittelten Strömungsmodell jedoch, daß die Vernachlässigung der dispersiven Terme in Bereichen mit intensiven Sekundärströmungen zu einer groben Fehleinschätzung der Fließgeschwindigkeit führt. Aus diesem Grund ist auch in der zweidimensionalen Strömungsmodellierung die Verfügbarkeit experimenteller Daten (Naturmeßdaten) die Voraussetzung für eine zuverlässige Modellierung. Am Beispiel der Mäanderströmung wurde ein effizientes Verfahren entwickelt, mit dem eine schnelle Kalibrierung des Simulationsmodells möglich ist. Die Extrapolation des kalibrierten Modells auf andere Abflußzustände wird damit zuverlässiger.

Erst die dreidimensionale Strömungsmodellierung unter Einsatz allgemeingültiger Turbulenzmodelle wird den weitestgehenden Verzicht auf Kalibrierrechnungen erlauben. Das im Rahmen des DFG-Projektes entwickelte dreidimensionale numerische Modell verwendet als einzige Vereinfachung einen hydrostatischen Druckansatz. Bei ausgeprägten Flachwasserströmungen, die dem geplanten Einsatzbereich des Modells entsprechen, ist diese Annahme gerechtfertigt. Gegenüber der zweidimensional-tiefengemittelten Modellierung ist der Rechenaufwand trotz dieser Vereinfachung um ein erhebliches höher. Deswegen war eine Modellierung der Mäanderströmung mit dem  $k$ - $\varepsilon$ -Modell, die eine wesentlich höhere Netzfeinheit vorausgesetzt hätte, zu diesem Zeitpunkt noch nicht möglich. Die Simulation unter Verwendung eines algebraischen Wirbelviskositätsmodells zeigte trotzdem bereits eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Vor allem wurde hier deutlich, daß das Modell in der Lage ist, die beobachteten Sekundärströmungen qualitativ und quantitativ gut wiederzugeben. Die große Schwäche des tiefengemittelten Modells, wie die Vernachlässigung dispersiver Terme und horizontaler Scherschichten, ist damit eliminiert.

Die Strömungsmodelle haben einen äußerst zuverlässigen Entwicklungsstand erreicht und sind über gut dokumentierte Eingabedateien einfach zu bedienen. Trotzdem kann und darf die Entwicklung nicht als abgeschlossen angesehen werden. So sind für die Zukunft Weiterentwicklungen am Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft in Aachen vorgesehen.

Folgende Arbeiten sind geplant:

***zweidimensionales Strömungsmodell***

- Entwicklung und Implementierung einer effizienteren Methode zur Behandlung naß- und trockenfallender Elemente
- Weitere Stabilisierung des  $k$ - $\varepsilon$ -Modells für die Berechnung natürlicher Strömungen mit extremen Rauheiten und bereichsweise sehr geringen Fließtiefen

***dreidimensionales Strömungsmodell***

- Verifikationsrechnungen mit feiner diskretisierten Netzen zur Überprüfung der Turbulenzmodelle ( $k$ - $\varepsilon$ -Modell und ASM)
- Entkoppelung der Strömungsgleichungen
- Erweiterung der Strömungsgleichungen zur Berücksichtigung des vertikalen Impulses unter Verzicht auf den hydrostatischen Druckansatz
- Implementierung eines vorgeschalteten numerischen Modells zur Festlegung von Einlauftrandbedingungen auf der Basis gleichförmiger Zuströmbedingungen
- Implementierung anderer iterativer Gleichungslöser (Konjugierte Gradienten) zur Reduzierung des Speicherplatzbedarfs

## 7 Literatur

### *Veröffentlichungen zum Projekt:<sup>7</sup>*

- ARNOLD, U.; G. ROUVE; M. SCHRÖDER; C.J. STEIN (1992): Multi-Channel Laser Doppler Velocimetry (LDV) and Digital Image Processing (DIP) in Fluvial Hydromechanics; Optics and Lasers in Engineering 16, pp 351-374, Elsevier Science Publishers LTD;
- ARNOLD, U.; G. ROUVE; J. STEIN (1989): A Review of Investigations on Compound Open-Channel Flow; Proc. Hydrocomp 1989; Dubrovnik Jugoslawien
- ARNOLD, U. C:J: STEIN; G. ROUVÉ (1989): Sophisticated Measurement Techniques for Experimental Investigation of Compound Open Channel Flow; Proc. Hydrocomp 89; Dubrovnik; Jugoslawien
- DETTMAR, J. (1994): Dreidimensionale Hydrodynamisch-Numerische Strömungssimulation mit freier Oberfläche; Diplomarbeit am Inst. für Wasserbau und Wasserwirtschaft, RWTH-Aachen, unveröffentlicht;
- FELDHAUS, U. (1993): Finite-Elemente Simulation naturnaher Fließgewässer am Beispiel der Wurm bei Herzogenrath; Diplomarbeit am Inst. für Wasserbau und Wasserwirtschaft, RWTH-Aachen, unveröffentlicht;
- FELDHAUS, U.; M. SCHRÖDER; R. FELDHAUS; G. ROUVÉ (1994): Robust Finite Element River Simulation Linked with Modern Computational Tools; 9th Congress of the Asian and Pacific Division of the IAHR; Aug. 1994; Singapore; Proceedings, Vol. 2
- ROUVÉ, G.; M. SCHRÖDER (1993): One-dimensional vs. Two-dimensional Prediction of Compound Open Channel Flow; Advances in Hydrosience and - Engineering; Proc. of the ICHE-'93; Vol 1; Washington DC; USA;
- ROUVÉ, G.; C.J. STEIN; E. RITTERBACH (1989): Strömungsvorgänge in natürlichen Fließgewässern mit angegliedertem bewachsenem Vorland; Symp. Hydraulik offener Gerinne; Febr. 1989; Wiener Mitteilungen
- SCHRÖDER, M.; C.J. STEIN; G. ROUVE (1991): Application of the 3D-LDV-Technique on Physical Model of Meandering Channel with Vegetated Flood Plain; 4th International Conference on Laser Anemometry - Advances and Applications 5th - 9th August 1991, CLeveland, Ohio, U.S.A.;
- STEIN, C.J.; G. ROUVE (1988): 2D-LDV-Technique for Measuring Flow in a Meandering Channel with Wetted Flood Plains - A New Application and First Results; Proc. of the Int. Conf. on Fluvial Hydraulics, Budapest, Ungarn; May / June 1988
- STEIN, C.J.; G. ROUVE (1989): 2D depth-averaged numerical predictions of the flow in a meandering channel with compound cross sections; Hydrosoft, Vol. 2, No. 1;

---

<sup>7</sup> Weitere Veröffentlichungen zum Projekt sind in der Bearbeitung.

**Referenzen**

- AMMER, M. (1993): Ein neues Finite-Elemente-Modell zur Simulation dreidimensionaler Strömungen mit freier Oberfläche; *Wasserwirtschaft* 83 (1993) 11;
- AMMER, M. (1993): Finite-Elemente-Modellierung dreidimensionaler Strömungen mit freier Oberfläche; *Mitteilungsheft Nr. 56, Hydraulik und Gewässerkunde*, TU München;
- ANDERSON, M.G.; P.D. BATES (1993): *Advances in floodplain flow modelling*; to be published in CATENA, 1993;
- ASCE TASK COMMITTEE (1988): *Turbulence Models in Hydraulic Computations*; *Journal of Hydraulic Engineering*, Special Issue, Vol. 114, No. 9;
- BECKER, E.B.; G.F. CAREY; J.T. ODEN (1981): *Finite Elements - An Introduction*, Vol. 1; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632; ISBN 0-13-317057-8
- CELIK, I.; RODI, W. (1984): *Simulation of Free-Surface Effects in Turbulent Channel Flows*; *PCH PhysicoChemical Hydrodynamics* Vol. 5, No. 3/4, pp. 217-227, 1984;
- CHOU, P.Y. (1945): *On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation*; *Quart. Appl. Math.* 3, 38;
- COWPER, G.R. (1973): *Gaussian Quadrature Formulas for Triangles*; *Int. Journal Numerical Methods in Engineering*, 7;
- DURST, F.; A. MELLING; J.H. WHITELAW (1981): *Principles and Practice of Laser-Doppler-Anemometry*; 2nd Ed., Academic Press Inc., London;
- DVWK (1991): *Hydraulische Berechnung von Fließgewässern*; *Merkblatt zur Wasserwirtschaft Heft 220*; Verlag Paul Parey, Hamburg und Berlin;
- ENGELMAN, M.S.; R.L. SANI (1982): *The Implementation of Normal and/or Tangential Boundary Conditions in Finite Element Codes for Incompressible Flow*; *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 2, 225-238;
- ENGELN-MÜLLGES, G.; F. REUTTER (1990): *Formelsammlung zur Numerischen Mathematik mit C-Programmen*; BI Wissenschaftsverlag; Mannheim/Wien/Zürich; 2. Auflage; ISBN 3-411-14272-3
- FELDHAUS, R. (1993): *Zur hydrodynamisch-numerischen Simulation von Mischwasserspeichern*; St. Augustin : Academia-Verlag; *Mitteilungen des Instituts für Wasserbau und Wasserwirtschaft der RWTH-Aachen*; Bd. 91;
- FELDHAUS, R.; J. HÖTTGES; T. BROCKHAUS; G. ROUVE (1992): *Finite Element Simulation of Flow and Pollution Transport Applied to a Part of the River Rhine*; 2nd International Conference on Hydraulic & Environmental Modelling of Coastal, Estuarine and River Waters, University of Bradford, England, 22/24 September 1992;
- FELDHAUS, R.; U. ARNOLD; G. ROUVÉ (1993): *Strömungsanalyse für die Rastatter Rheinniederung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode*; *Wasser + Boden*, Heft 1, 1993;
- HINZE, A.P. (1975): *Turbulence*; McGraw-Hill Book Company;

- HOOD, P. (1976): Frontal Solution Program for Unsymmetric Matrices; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10, 379-399;
- IWASA, Y.; N. TAMAI, A. WADA (1988): Numerical Simulation of Flow in Compound Channels; *Proceedings of the 3rd International Conference on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, Tokyo, July 1988;
- KING, I.P. (1970): An Automatic Reordering Scheme for Simultaneous Equations Derived from Network Systems; *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol 2, 523-533;
- KING, I.P. (1976): A Finite Element Model for Unsteady Flood Routing through Irregular Channels; *Proc. of the 2nd Int. Conf. on FE in Water Resources*, Imperial College, London;
- KING, I.P. (1982): A Finite Element Model for Three Dimensional Flow; Report: U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station Resource Management Associates, Lafayette, California, unveröffentlicht;
- KING, I.P. (1982): A Three Dimensional Finite Element Model for Stratified Flow; *Proc. of the 4th Int. Conf. on Finite Elements in Water Resources*;
- KING, I.P. (1984): A Review of Strategies for Finite Element Modeling of Three Dimensional Hydrodynamic Systems; *Proc. of the 5th Int. Conf. on Finite Elements in Water Resources*;
- KING, I.P. (1988): A Model for Three Dimensional Density Stratified Flow; Report, U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi; Resource Management Associates, Lafayette, California, unveröffentlicht;
- KING, I.P.; L.C. ROIG (1988): Two dimensional finite element models for floodplain and tidal flats; *Proc. of the Int. Conf. on Computational Methods in Flow Analysis*, Okayama, Japan, pp. 711-718, editors: K. Niki and M. Kawahara;
- KING, I.P.; W.R. NORTON (1978): Recent Application of RMA's Finite Element Models for Two Dimensional Hydrodynamics and Water Quality; *Proceedings of the 2nd Int. Conf. on Finite Elements in Water Resources*, Imperial College, London, July 1978;
- KUIPERS, J.; C.B. VREUGDENHIL (1973): Calculations of Two-dimensional Horizontal Flow; Report S163-1, DELFT Hydraulics Laboratories, Netherlands;
- LAPIDUS, L.; G. F. PINDER (1982): *Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering*; John Wiley & Sons, Inc.; ISBN 0-471-09866-3
- LARSSON, R. (1988): Numerical Simulation of Flow in Compound Channels; *Proc. of the Third International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, Tokyo, IAHR;
- LAUFER, J. (1951): Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel; Report 1053, National Advisory Committee on Aeronautics, 1951;
- LAUNDER, B.E.; D.B. SPALDING (1974): The numerical computation of turbulent flows; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3, 269-289;
- LAUNDER, B.E.; G.J. REECE; W. RODI (1975): Progress in the Development of a Reynolds-stress turbulence closure; *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 68, part 3, pp, 537-566;

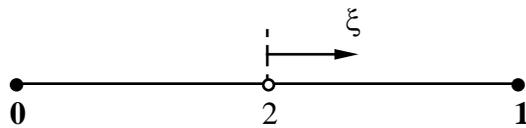
- LAUNDER, B.E.; W.M. YING (1973): Prediction of Flow and Heat Transfer in Ducts of Square Cross-Section; Proc., Institution of Mechanical Engineers, Vol. 187, pp. 455-461;
- LESCHZINER, M.A.; W. RODI (1979): Calculation of Strongly Curved Open Channel Flow; Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the ASCE, Vol. 105, No. HY10, October, 1979;
- LINDNER, K. (1982): Der Strömungswiderstand von Pflanzenbeständen; Mitteilungen des Leichtweiß-Instituts für Wasserbau, TU Braunschweig, Heft 75;
- NALLASAMY, M. (1987): Turbulence Models and their Applications to the Prediction of Internal Flows: A Review; Computers & Fluids, Vol. 15, No. 2, pp. 151-194, 1987;
- NAOT, D. (1984): Response of Channel Flow to Roughness Heterogeneity; Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 110, No. 11, November 1984;
- NAOT, D.; W. RODI (1982): Calculation of Secondary Currents in Channel Flow; Journal of the Hydraulics Division, Proc. of ASCE, Vol. 108, No. HY8, Aug. 1982;
- NEZU, I.; H. NAKAGAWA (1993): Turbulence in Open-channel Flows; International Association For Hydraulic Research, Monograph Series; A.A.Balkema/Rotterdam/Brookfield/1993;
- NORTON, W. R.; I.P. KING (1976): A Two Dimensional Finite Element Program For Problems in Horizontal Free Surface Hydromechanics; User's guide and operating instructions for the computer program RMA-2; Resource Management Associates, Lafayette, California ;
- PASCHE, E. (1984): Turbulenzmechanismen in naturnahen Fließgewässern und die Möglichkeit ihrer rechnerischen Erfassung; Mitteilungen des Instituts für Wasserbau, RWTH Aachen, Heft 52;
- RASTOGI, A.K.; W. RODI (1978): Prediction of Heat and Mass Transfer in Open Channels; Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 104/3, pp. 357-420;
- RIJN, L.C. VAN (1986): Mathematical Modeling of Suspended Sediment in Nonuniform Flows; Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 112, No. 6, June, 1986;
- RODI, W. (1976): A New Algebraic Relation for Calculating the Reynolds Stresses; Mechanics of Fluid, ZAMM 56, T219 - T221;
- RODI, W. (1978): Turbulenzmodelle und ihre Anwendung auf Probleme des Wasserbaus; Habilitationsschrift Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität Karlsruhe;
- RODI, W. (1988): Recent Developments in Turbulence Modelling; Proc. of the Third International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, IAHR;
- ROUVE, G. (1987): Hydraulische Probleme beim naturnahen Gewässerausbau; Forschungsbericht DFG, Ergebnisse aus dem Schwerpunktprogramm "Anthropogene Einflüsse auf hydrologische Prozesse", Band 2;
- ROZOVSKII, I.L. (1957): Flow of Water in Bends of Open Channels; Translated from Russian, published for: The National Science Foundation, Washington D.C. and the Department of the Interior by the Israel Program for Scientific Translation;

- SCHLICHTING, H. (1958): Grenzschichttheorie; Verlag G. Braun, Karlsruhe;
- SCHULTE, H. (1989): Zur numerischen Simulation abgelöster, turbulenter Strömungen mit der Finite-Elemente-Methode; Mitteilungen Institut für Wasserbau und Wasserwirtschaft, RWTH-Aachen, Diss. Bd. 82;
- SHIR, C.C. (1973): A Preliminary Numerical Study of Atmospheric Turbulent Flows in the Idealized Planetary Boundary Layer; Journal of Atmospheric Sciences, Vol. 30, 1973, pp. 1327-1339;
- TENNEKES, H.T.; J.L. LUMLEY (1972): A First Course in Turbulence; MIT Press;
- TOMINAGA, A.; I. NEZU (1991): Turbulent Structure in Compound Open-Channel Flow; Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 117, No. 1, Jan. 1991, ASCE; ISSN 0733-9429/91)0001-0021
- TSI (1981): Technique for Measuring 3 Velocity Components; Technical Proposal;
- UNO, I.; H. UEDA (1988): Some Contributions to the Algebraic Stress Turbulence Model for the Application of Stratified Flow; Proc. of the Third International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, IAHR, 26-28 July, 1988;
- WANG, S.S.Y. (1988): Three-Dimensional Models for Fluvial Hydraulic Simulation; International Conference on Fluvial Hydraulics, Budapest, 1988;
- WANG, S.S.Y. (1990): The State of the Art of Finite Element Modeling of 3-D Sedimentation Processes; Proceedings of the 8th International Conference on Computational Methods in Water Resources, Venice, Italy, June 1990, pp. 265-279;
- WANG, S.S.Y. (1991): Computational modelling of alluvial rivers; 2nd Int. Conf. on Computer Methods and Water Resources, Marrakesh, Morocco, Febr. 91;
- WENKA, Th. (1992): Numerische Berechnung von Strömungsvorgängen in naturnahen Flußläufen mit einem tiefengemittelten Modell; Dissertation Universität Karlsruhe (TH);
- WENKA, Th.; P. VALENTA; W. RODI (1991): Depth-Average Calculation of Flood Flow in a River with Irregular Geometry; Proc. of the 24th IAHR-Congress, Madrid, Spain, 9.-13. Sept. 1991;
- ZANKE, U. (1982): Grundlagen der Sedimentbewegung; Springer-Verlag Berlin /Hamburg/New York;
- ZIENKIEWICZ, O.C. (1984): Methode der Finiten Elemente; Hanser Verlag München/Wien, 2. Auflage; ISBN 3-446-12525-6

## Anhang A: Formfunktionen und Integrationsformeln

### A.1 Eindimensionale Elemente

#### A.1.1 Linie



Knoten	$\xi_i$
0	-1,0
1	1,0
2	0,0

#### a) lineare Formfunktionen

$$M_i = \frac{1}{2} \cdot (1 + \xi_i \cdot \xi) \quad (i = 0,1)$$

#### b) quadratische Formfunktionen

$$N_i = \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (\xi + \xi_i) \quad (i = 0,1)$$

$$N_2 = 1 - \xi^2$$

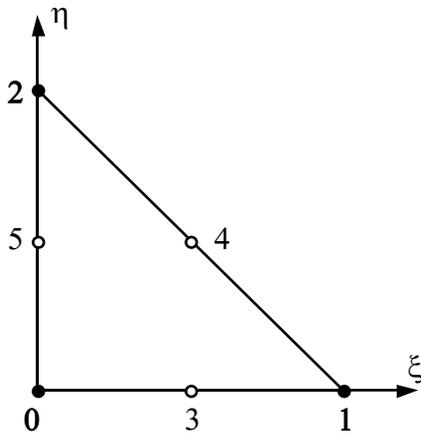
#### c) Gausspunktintegration

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_i w_i \cdot f(\xi_i)$$

Die Lage  $\xi_j$  und das Gewicht  $w_j$  der Gausspunkte des Linienelementes sind in Tabelle A.1 für die Integration 3., 5. und 7. Ordnung zusammengestellt.

## A.2 Zweidimensionale Elemente

### A.2.1 Dreieck



Knoten	$\xi_i$	$\eta_i$
0	0,0	0,0
1	1,0	0,0
2	0,0	1,0
3	0,5	0,0
4	0,5	0,5
5	0,0	0,5

#### a) Flächenkoordinaten des Einheitsdreiecks (z.B.: ZIENKIEWICZ, 1984)

$$L_0 = 1 - \xi - \eta$$

$$L_1 = \xi$$

$$L_2 = \eta$$

#### b) lineare Formfunktionen

$$M_i = L_i \quad (i = 0,1,2)$$

#### c) quadratische Formfunktionen

$$N_i = L_i \cdot (2L_i - 1) \quad (i = 0,1,2)$$

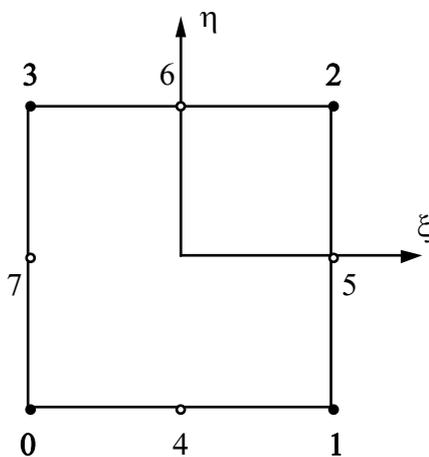
$$N_i = 4L_j L_k \quad (i = 3,4,5)$$

j und k sind die Nachbarknoten von i; z.B.:  $N_3 = 4L_0 L_1$

**d) Gausspunktintegration**

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_i w_i \cdot f(\xi_i, \eta_i)$$

Die Integration über den Dreiecksbereich erfolgt mit den speziell entwickelten Gleichungen von COWPER (1973). Die Lage der Gausspunkte  $(\xi_i, \eta_i)$  und deren Gewicht  $(w_i)$  sind in Tabelle A.2 für die Integration 3., 5. und 7. Ordnung zusammengestellt.

**A.2.2 Quadrat**

Knoten	$\xi_i$	$\eta_i$
0	-1,0	-1,0
1	1,0	-1,0
2	1,0	1,0
3	-1,0	1,0
4	0,0	-1,0
5	1,0	0,0
6	0,0	1,0
7	-1,0	0,0

**a) lineare Formfunktionen**

$$M_i = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi_i \xi) \cdot (1 + \eta_i \eta) \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

**b) quadratische Formfunktionen**

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi_i \xi) \cdot (1 + \eta_i \eta) \cdot (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1) \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 + \eta_i \eta) \quad (i = 4, 6)$$

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi_i \xi) \cdot (1 + \eta^2) \quad (i = 5, 7)$$

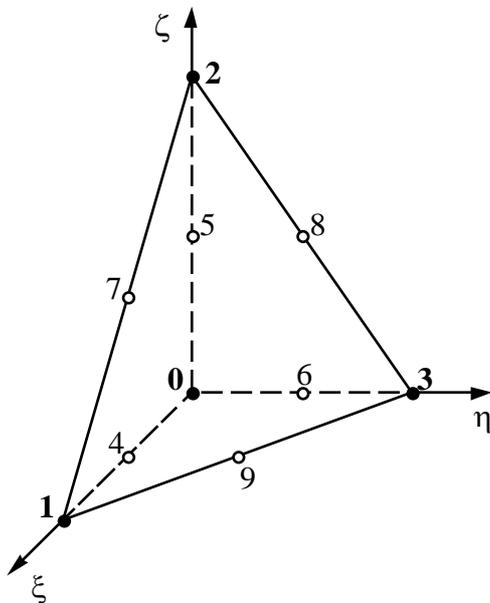
### c) Gausspunktintegration

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_i \sum_j w_i \cdot w_j \cdot f(\xi_i, \eta_j)$$

Die Lage  $(\xi_i, \eta_j)$  und die Gewichte  $(w_i, w_j)$  der Gausspunkte ergeben sich in Analogie zur eindimensionalen Integration über das Linienelement (s. Tabelle A.1).

## A.3 Dreidimensionale Elemente

### A.3.1 Tetraeder



Knoten	$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$
0	0,0	0,0	0,0
1	1,0	0,0	0,0
2	0,0	0,0	1,0
3	0,0	1,0	0,0
4	0,5	0,0	0,0
5	0,0	0,0	0,5
6	0,0	0,5	0,0
7	0,5	0,0	0,5
8	0,0	0,5	0,5
9	0,5	0,5	0,0

#### a) Volumenkoordinaten des Einheitstetraeders

$$\begin{aligned} L_0 &= 1 - \xi - \eta - \zeta \\ L_1 &= \xi \\ L_2 &= \eta \\ L_3 &= \zeta \end{aligned}$$

#### b) lineare Formfunktionen

$$M_i = L_i$$

**c) quadratische Formfunktionen**

$$N_i = L_i (2L_i - 1) \quad (i = 0,1,2,3)$$

$$N_i = 4L_j L_k \quad (i = 4,5,6,7,8,9)$$

j und k sind die Nachbarknoten von i; z.B.:  $N_4 = 4L_0 L_1$

**d) Gausspunktintegration**

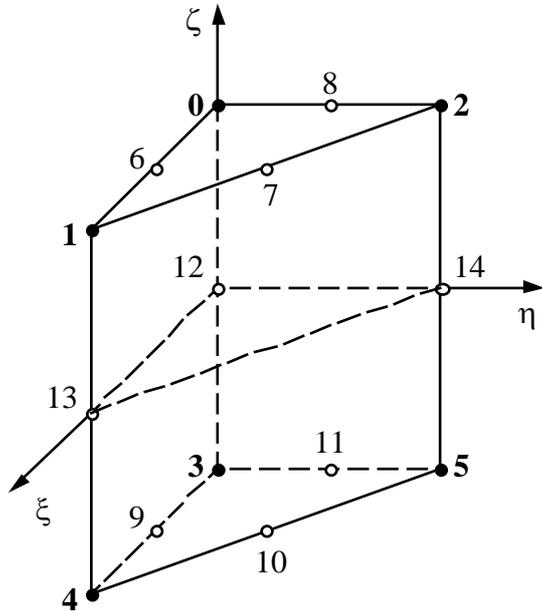
$$\int_0^1 \int_0^{1-\zeta} \int_0^{1-\eta-\zeta} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_i w_i \cdot f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$$

Die Integration 3. Ordnung erfolgt mit einer speziellen Gleichung für Tetraederelemente. Die Lage  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  und das Gewicht der Gausspunkte ( $w_i$ ) sind mit Tabelle A.3 gegeben.

Für die Integration 5. und 7. Ordnung kann leider keine spezielle Gleichung für Tetraederelemente angegeben werden. Alternativ wird ein Verfahren von HAMMERS et al. (1956) verwendet, mit dem sich Integrationsformeln für beliebige n-dimensionale Elemente aus (n-1)-dimensionalen Elementen ableiten lassen. Der Nachteil dieses Verfahrens liegt in einer größeren Anzahl von Gausspunkten gegenüber den speziellen Gleichungen. Im vorliegenden Fall wird aus der Integrationsformel für das Dreieck eine für den Tetraeder entwickelt. Die Lage  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  und das Gewicht der Gausspunkte  $w_i$  berechnen sich mit den Faktoren  $\chi_j$  und  $\omega_j$  nach Tabelle A.4 wie folgt:

$$\begin{aligned} \xi_i^{\text{Tetraeder}} &= \chi_j \cdot \xi_k^{\text{Dreieck}} \\ \eta_i^{\text{Tetraeder}} &= \chi_j \cdot \eta_k^{\text{Dreieck}} \\ \zeta_i^{\text{Tetraeder}} &= 1 - \chi_j \\ w_i^{\text{Tetraeder}} &= \omega_j \cdot w_k^{\text{Dreieck}} \end{aligned}$$

### A.3.2 Dreiecksprisma



Knoten	$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$
0	0,0	0,0	1,0
1	1,0	0,0	1,0
2	0,0	1,0	1,0
3	0,0	0,0	-1,0
4	1,0	0,0	-1,0
5	0,0	1,0	-1,0
6	0,5	0,0	1,0
7	0,5	0,5	1,0
8	0,0	0,5	1,0
9	0,5	0,0	-1,0
10	0,5	0,5	-1,0
11	0,0	0,5	-1,0
12	0,0	0,0	0,0
13	1,0	0,0	0,0
14	0,0	1,0	0,0

#### a) Flächenkoordinaten des Einheitsdreiecks (vgl. A.2.1)

$$L_0 = L_3 = 1 - \xi - \eta$$

$$L_1 = L_4 = \xi$$

$$L_2 = L_5 = \eta$$

#### b) lineare Formfunktionen

$$M_i = \frac{1}{2} \cdot (1 + \zeta_i \zeta) \cdot L_i \quad (i = 0,1,2,3,4,5)$$

#### c) quadratische Formfunktionen

$$N_i = \frac{1}{2} \cdot L_i \cdot (2L_i - 1) \cdot (1 + \zeta_i \zeta) - \frac{1}{2} \cdot L_i \cdot (1 - \zeta^2) \quad (i = 0,1,2,3,4,5)$$

$$N_i = 2 \cdot L_j L_k \cdot (1 + \zeta_i \zeta) \quad (i = 6,7,8,9,10,11)$$

j und k sind die Nachbarknoten von i; z.B.:  $N_6 = 2 \cdot L_0 L_1 \cdot (1 + \zeta_6 \zeta)$

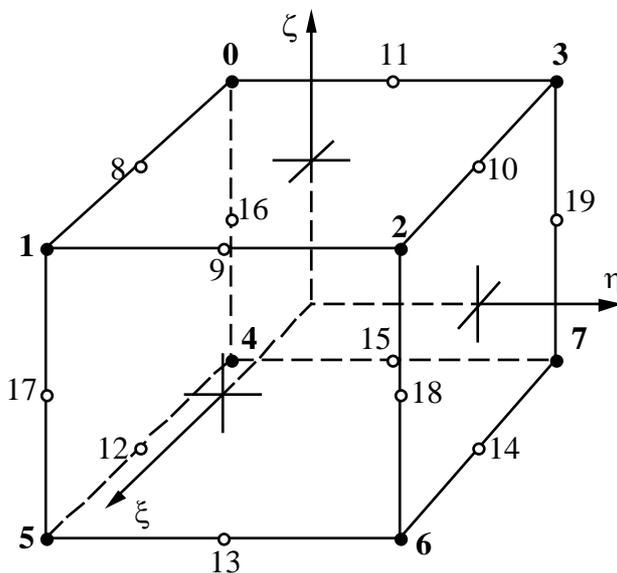
$$N_i = L_{i-12} \cdot (1 - \zeta^2) \quad (i = 12,13,14)$$

### d) Gausspunktintegration

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_i \sum_j w_i \cdot w_j \cdot f(\xi_i, \eta_i, \zeta_j)$$

Die Integrationsformel für das Dreiecksprisma ergibt sich direkt aus derjenigen für das Dreieck ( $\xi_i, \eta_i$ , nach Tabelle A.2) und das Linienelement ( $\zeta_j$  nach Tabelle A.1).

### A.3.3 Würfel



Knoten	$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$
0	-1,0	-1,0	1,0
1	1,0	-1,0	1,0
2	1,0	1,0	1,0
3	-1,0	1,0	1,0
4	-1,0	-1,0	-1,0
5	1,0	-1,0	-1,0
6	1,0	1,0	-1,0
7	-1,0	1,0	-1,0
8	0,0	-1,0	1,0
9	1,0	0,0	1,0
10	0,0	1,0	1,0
11	-1,0	0,0	1,0
12	0,0	-1,0	-1,0
13	1,0	0,0	-1,0
14	0,0	1,0	-1,0
15	-1,0	0,0	-1,0
16	-1,0	-1,0	0,0
17	1,0	-1,0	0,0
18	1,0	1,0	0,0
19	-1,0	1,0	0,0

#### a) lineare Formfunktionen

$$M_i = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi_i \xi) \cdot (1 + \eta_i \eta) \cdot (1 + \zeta_i \zeta)$$

#### b) quadratische Formfunktionen

$$N_i = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi_i \xi) \cdot (1 + \eta_i \eta) \cdot (1 + \zeta_i \zeta) \cdot (\xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta - 2) \quad (i = 0, 1, \dots, 7)$$

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi^2) \cdot (1 + \eta_i \eta) \cdot (1 + \zeta_i \zeta) \quad (i = 8, 10, 12, 14)$$

$$N_i = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi_i \xi) \cdot (1 - \eta^2) \cdot (1 + \zeta_i \zeta) \quad (i = 9, 11, 13, 15)$$

$$N_i = \frac{1}{8} \cdot (1 + \xi_i \xi) \cdot (1 + \eta_i \eta) \cdot (1 - \zeta^2) \quad (i = 16, 17, 18, 19)$$

### c) Gausspunktintegration

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_i \sum_j \sum_k w_i \cdot w_j \cdot w_k \cdot f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

Die Lage  $(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$  und die Gewichte  $(w_i, w_j, w_k)$  der Gausspunkte ergeben sich in Analogie zur eindimensionalen Integration über das Linienelement (s. Tabelle A.1).

Tab. A.1: Lage und Gewicht der Gausspunkte für die eindimensionale Integration (aus ZIENKIEWICZ, 1984)

Ordnung	Pkt.	Lage $\xi_j$	Gewicht $w_j$
3	1	-0,577 350 269 189 625	1,000 000 000 000 000
	2	0,577 350 269 189 625	1,000 000 000 000 000
5	1	-0,774 596 669 241 483	0,555 555 555 555 556
	2	0,000 000 000 000 000	0,888 888 888 888 889
	3	0,774 596 669 241 483	0,555 555 555 555 556
7	1	-0,861 136 311 594 053	0,347 854 845 137 454
	2	-0,339 981 043 584 856	0,652 145 154 862 546
	3	0,339 981 043 584 856	0,652 145 154 862 546
	4	0,861 136 311 594 053	0,347 854 845 137 454

Tab. A.2a: Lage und Gewicht der Gausspunkte für die Integration des Dreiecksbereiches (nach COWPER, 1973)

Ordnung	Pkt.	Lage $\xi_j$	Lage $\eta_j$	Gewicht $w_j$
3	1	0,333 333 333 333 333	0,333 333 333 333 333	-0,281 250 000 000 000
	2	0,600 000 000 000 000	0,200 000 000 000 000	0,260 416 666 666 667
	3	0,200 000 000 000 000	0,600 000 000 000 000	0,260 416 666 666 667
	4	0,200 000 000 000 000	0,200 000 000 000 000	0,260 416 666 666 667

Tab. A.2b: Lage und Gewicht der Gausspunkte für die Integration des Dreiecksbereiches (nach COWPER, 1973)

Ord-nung	Pkt.	Lage $\xi_j$	Lage $\eta_j$	Gewicht $w_j$
5	1	0,333 333 333 333 333	0,333 333 333 333 333	0,112 500 000 000 000
	2	0,059 715 871 789 770	0,470 142 064 105 115	0,066 197 076 394 253
	3	0,470 142 064 105 115	0,059 715 871 789 770	0,066 197 076 394 253
	4	0,470 142 064 105 115	0,470 142 064 105 115	0,066 197 076 394 253
	5	0,797 426 985 353 087	0,101 286 507 323 456	0,066 197 076 394 253
	6	0,101 286 507 323 456	0,797 426 985 353 087	0,066 197 076 394 253
	7	0,101 286 507 323 456	0,101 286 507 323 456	0,066 197 076 394 253
7	1	0,333 333 333 333 333	0,333 333 333 333 333	-0,074 785 022 233 835
	2	0,479 308 067 841 923	0,260 345 966 079 038	0,087 807 628 716 602
	3	0,260 345 966 079 038	0,479 308 067 841 923	0,087 807 628 716 602
	4	0,260 345 966 079 038	0,260 345 966 079 038	0,087 807 628 716 602
	5	0,869 739 794 195 568	0,065 130 102 902 216	0,026 673 617 804 420
	6	0,065 130 102 902 216	0,869 739 794 195 568	0,026 673 617 804 420
	7	0,065 130 102 902 216	0,065 130 102 902 216	0,026 673 617 804 420
	8	0,638 444 188 569 809	0,312 865 496 004 875	0,038 556 880 445 129
	9	0,312 865 496 004 875	0,638 444 188 569 809	0,038 556 880 445 129
	10	0,638 444 188 569 809	0,048 690 315 425 316	0,038 556 880 445 129
	11	0,048 690 315 425 316	0,638 444 188 569 809	0,038 556 880 445 129
	12	0,312 865 496 004 875	0,048 690 315 425 316	0,038 556 880 445 129
	13	0,048 690 315 425 316	0,312 865 496 004 875	0,038 556 880 445 129

Tab. A.3: Lage und Gewicht der Gausspunkte für die Integration des Tetraederbereichs

Ord-nung	Pkt.	Lage $\xi_j$	Lage $\eta_j$	Lage $\zeta_j$	Gewicht $w_j$
3	1	1/4	1/4	1/4	2/15
	2	1/2	1/6	1/6	3/40
	3	1/6	1/2	1/6	3/40
	4	1/6	1/6	1/2	3/40
	5	1/6	1/6	1/6	3/40

Tab. A.4: Faktoren für die Entwicklung allgemeiner Integrationsformeln (nach HAMMERS et al., 1956)

Ord-nung	Nr.	Lage $\chi_i$	Gewicht $\omega_j$
3	1	0,455 848 155 988 775	0,100 785 882 079 825
	2	0,877 485 177 344 559	0,232 547 451 253 508
5	1	0,294 997 790 111 502	0,029 950 703 008 581
	2	0,652 996 233 961 648	0,146 246 269 259 866
	3	0,927 005 975 926 850	0,157 136 361 064 887
7	1	0,204 148 582 103 227	0,010 352 240 749 918
	2	0,482 952 704 895 632	0,068 633 887 172 923
	3	0,761 399 262 448 138	0,143 458 789 799 214
	4	0,951 499 450 553 003	0,110 888 415 611 278

## Anhang B: FE-Gleichungen

### B.1 3D Gleichungen mit hydrostatischem Druckansatz

#### B.1.1 Tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned}
 R_c &= \int_{V_o} M_i \cdot \left[ \beta_2 \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right] dV_o \\
 &+ \int_{V_u} M_i \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) dV_u \\
 &+ \int_A M_{h,i} \cdot \left( U_s \frac{\partial S}{\partial \xi} + V_s \frac{\partial S}{\partial \eta} - U_a \frac{\partial a}{\partial \xi} - V_a \frac{\partial a}{\partial \eta} \right) dA
 \end{aligned}$$

$$\text{mit: } \frac{\partial z}{\partial \xi_i} = \frac{\partial b}{\partial \xi_i} \cdot (\beta_1 - 1) \cdot (\beta_1 - 1) + \beta_1 \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial \xi_i} - \beta_2 \frac{\partial t}{\partial \xi_i} \right)$$

$$\beta_1 = \frac{\zeta - b}{t - b}$$

$$\beta_2 = \frac{S - b}{t - b}$$

- $\xi, \eta, \zeta$     Koordinaten im nicht transformierten FE-Netz  
 $t, b$         obere und untere Begrenzung des Transformationsbereiches  
 $S, a$         Wasserspiegel- und Sohlhöhe  
 $V_o$         Integrationsvolumen im Transformationsbereich  
 $V_u$         Integrationsvolumen unterhalb des Transformationsbereiches  
 $A$          horizontale Integrationsfläche  
 $M_i, M_{h,i}$     lineare Formfunktionen

### B.1.2 Reynoldsgleichungen

$$\begin{aligned}
R_{U_k} &= \int_{\Omega_u} N_i \cdot (t-b) \cdot \left( U_j \cdot \frac{\partial U_k}{\partial \xi_j} - F_k \right) d\Omega_u \\
&+ \int_{\Omega_u} N_i \cdot (t-b) \cdot g \cdot \frac{\partial b}{\partial \xi_k} d\Omega_u - \int_{\Omega_u} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[ N_i \cdot \left( \frac{t-b}{S-b} \right) \right] \cdot \frac{g}{2} \cdot (S-b)^2 d\Omega_u \\
&+ \int_{\Omega_u} \frac{\partial}{\partial \xi_i} [N_i \cdot (t-b)] \cdot \left( v \cdot \frac{\partial U_k}{\partial \xi_j} - \overline{u_k u_j} \right) d\Omega_u \\
&+ \int_{\Gamma_u} N_i \cdot (t-b) \cdot \left[ \frac{g}{2} \cdot (S-b) \cdot n_k - v \frac{\partial U_k}{\partial n} + n_j \cdot \overline{u_k u_j} \right] d\Gamma_u \\
&+ \int_{\Omega_o} N_i \cdot (S-b) \cdot \left( U \cdot \frac{\partial U_k}{\partial \xi} + V \cdot \frac{\partial U_k}{\partial \eta} - F_k \right) d\Omega_o \\
&+ \int_{\Omega_o} N_i \cdot (t-b) \cdot \left( W - U \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} - V \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial U_k}{\partial \zeta} d\Omega_o \\
&+ \int_{\Omega_o} N_i \cdot (S-b) \cdot g \cdot \frac{\partial b}{\partial \xi_k} d\Omega_o - \int_{\Omega_o} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_k} \cdot \frac{g}{2} \cdot (S-b)^2 d\Omega_o \\
&+ \int_{\Omega_o} \frac{\partial}{\partial \xi} [N_i \cdot (S-b)] \cdot T_{k1} + \frac{\partial}{\partial \eta} [N_i \cdot (S-b)] \cdot T_{k2} d\Omega_o \\
&+ \int_{\Omega_o} \frac{\partial}{\partial \zeta} [N_i \cdot (S-b)] \cdot \frac{1}{\beta_2} \cdot \left( T_{k3} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot T_{k1} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot T_{k2} \right) d\Omega_o \\
&+ \int_{\Gamma_o} N_i \cdot (S-b) \cdot \left[ \frac{g}{2} \cdot (S-b) \cdot n_k - v \frac{\partial U_k}{\partial n} + n_j \cdot \overline{u_k u_j} \right] d\Gamma_o
\end{aligned}$$

$$\text{mit: } T_{k1} = v \cdot \left( \frac{\partial U_k}{\partial \xi} - \frac{1}{\beta_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial \zeta} \right) - \overline{u_k u_1}$$

$$T_{k2} = v \cdot \left( \frac{\partial U_k}{\partial \eta} - \frac{1}{\beta_2} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial \zeta} \right) - \overline{u_k u_2}$$

$$T_{k3} = v \cdot \left( \frac{1}{\beta_2} \cdot \frac{\partial U_k}{\partial \zeta} \right) - \overline{u_k u_3}$$

$$-\overline{u_i u_j} = v_t \cdot \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

$F_k$  äußere Kraft (hier: Corioliskraft)

$g$  Erdschwere,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

$v$  kinematische Viskosität

$v_t$  Wirbelviskosität

$k$  turbulente kinetische Energie

$\delta_{ij}$  Kronecker Delta

$n_i$  Randnormalenvektor

$k$  Gleichungsindex:  $k = 1, 2$

$j$  Summationskonvention:  $j = 1, 2, 3$

$N_i$  quadratische Formfunktion

### B.1.3 Kontinuitätsgleichung - Randwertgleichung

$$R_W = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial W}{\partial z} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\Omega$$

### B.1.4 k-ε-Gleichungen

$$R_k = \int_{\Omega} N_i \cdot \left( U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} - P + \varepsilon \right) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \cdot \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Gamma} N_i \cdot \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \cdot \frac{\partial k}{\partial n} d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
R_\varepsilon &= \int_{\Omega} N_i \cdot \left( U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P + c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \varepsilon \right) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \cdot \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Gamma} N_i \cdot \left( v + \frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} d\Gamma
\end{aligned}$$

mit: Produktion  $P = -\overline{u_i u_j} \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = v_t \cdot \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \cdot \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$

Wirbelviskosität:  $v_t = c_\mu \cdot c_D \cdot \frac{k^2}{\varepsilon}$

Modellkonstanten:

- $c_\mu = 0,09$
- $c_D = 1,0$
- $\sigma_k = 1,0$
- $\sigma_\varepsilon = 1,3$
- $c_{1\varepsilon} = 1,44$
- $c_{2\varepsilon} = 1,92$

## B.2 2D-tiefengemittelte Gleichungen

### B.2.1 Flachwassergleichungen

$$\begin{aligned}
R_{U_k} &= \int_{\Omega} N_i \cdot \left( H \cdot U_j \cdot \frac{\partial U_k}{\partial x_j} + g \cdot H \cdot \frac{\partial a}{\partial x_k} - H \cdot F_k \right) d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \cdot \left( v \cdot \frac{\partial (H \cdot U_k)}{\partial x_j} - H \cdot \overline{u_k u_j} \right) d\Omega \\
&- \int_{\Gamma} N_i \cdot \left( v \cdot \frac{\partial (H \cdot U_k)}{\partial x_j} - H \cdot \overline{u_k u_j} \right) \cdot n_j d\Gamma \\
&- \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \cdot \frac{g \cdot H^2}{2} d\Omega + \int_{\Omega} N_i \cdot \frac{g \cdot H^2}{2} \cdot \eta_k d\Omega
\end{aligned}$$

$$R_H = \int_{\Omega} M_i \cdot \left( H \cdot \frac{\partial U_j}{\partial x_j} + U_j \cdot \frac{\partial H}{\partial x_j} \right) d\Omega$$

- mit: H Fließtiefe  
 $F_k$  äußere Kräfte: Corioliskraft, Sohl- und Windschubspannungen  
k Gleichungsindex:  $k = 1, 2$   
j Summationskonvention:  $j = 1, 2$

### B.2.2 k- $\varepsilon$ -Gleichungen

$$R_k = \int_{\Omega} N_i \cdot \left( U_j \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} - P - P_{kv} + \varepsilon \right) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \cdot \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Gamma} N_i \cdot \left( v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \cdot \frac{\partial k}{\partial n} d\Gamma$$

$$R_{\varepsilon} = \int_{\Omega} N_i \cdot \left( U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} P - P_{\varepsilon v} + c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \varepsilon \right) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \cdot \left( v + \frac{v_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Gamma} N_i \cdot \left( v + \frac{v_t}{\sigma_{\varepsilon}} \right) \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} d\Gamma$$

mit:  $P_{kv} = c_k \cdot \frac{U_{\tau}^3}{H} = \frac{1}{c_f} \cdot \frac{U_{\tau}^3}{H}$

$$P_{\varepsilon v} = c_{\varepsilon} \cdot \frac{U_{\tau}^4}{H^2} = \frac{c_{2\varepsilon} \cdot \sqrt{c_{\mu}}}{c_f^{3/4} \cdot \sqrt{e^*} \cdot \sigma_t} \cdot \frac{U_{\tau}^4}{H^2}$$

- $c_f$  Reibungskoeffizient  
 $U_{\tau}$  Sohlschubspannungsgeschwindigkeit  
 $\sigma_t$  turbulente Schmidtzahl  
 $e^*$  dimensionslose Diffusivität